

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

ОТВЕТЫ и РЕШЕНИЯ

10-11

К заданиям учебника
Ш. А. Алимова, Ю. М. Колягина и др.

Алгебра
и начала анализа

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

А.П. Щеглова

**ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР
ЗАДАНИЙ ИЗ УЧЕБНИКА
ПО АЛГЕБРЕ
И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА**

авторов

**Ш.А. Алимова,
Ю.М. Колягина,
под научным руководством
А.Н. Тихонова
(М.: Просвещение)**

10–11 классы

Москва • «ВАКО» • 2007

УДК 337:167.1:[512+517]

ББК 22.1я721

ЩЗЗ

Щеглова А.П.

ЩЗЗ Подробный разбор заданий из учебника по алгебре и началам анализа для 10–11 классов Ш.А. Алимова, Ю.Н. Колягина. – М.: ВАКО, 2007. – 352 с. – (Сам себе репетитор).

ISBN 978-5-94665-528-6

Пособие содержит подробный разбор заданий из учебника по алгебре и началам анализа для 10–11 классов **Ш.А. Алимова, Ю.Н. Колягина (М.: Просвещение)**. Приводятся основные сведения по каждому разделу, алгоритмы решения типовых задач, ключи, ответы и подробный разбор заданий.

Автор – практикующий педагог с большим стажем подготовки абитуриентов к экзаменам.

УДК 337:167.1:[512+517]

ББК 22.1я721

Глава I

Действительные числа

§1. Целые и рациональные числа

1. 1) $\frac{2}{3} = 0,666\dots = 0,(6)$; 2) $\frac{8}{11} = 0,7272\dots = 0,(72)$;

3) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$; 4) $-\frac{3}{4} = -\frac{75}{100} = -0,75$;

5) $-8\frac{2}{7} = -\frac{56+2}{7} = -\frac{58}{7} = -8,(285714)$; 6) $\frac{13}{99} = 0,1313\dots = 0,(13)$.

2. Выполнить действие и записать результат в виде десятичной дроби:

1) $\frac{2}{11} + \frac{1}{9} = \frac{18}{99} + \frac{11}{99} = \frac{29}{99} = 0,(29)$.

2) $\frac{8}{13} + \frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 3 + 2 \cdot 13}{3 \cdot 13} = \frac{24 + 26}{39} = \frac{50}{39} = 1,(282051)$.

3) $\frac{1}{3} + 1,25 = \frac{1}{3} + \frac{5}{4} = \frac{19}{12} = 1,58(3)$.

4) $\frac{1}{6} + 0,33 = \frac{1}{6} + \frac{33}{100} = \frac{50 + 99}{300} = \frac{149}{300} = 0,49(6)$.

5) $\frac{3}{14} \cdot 1,05 = \frac{3}{14} \cdot \frac{105}{100} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3}{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{9}{40} = \frac{225}{1000} = 0,225$.

6) $\frac{7}{9} \cdot 1,7 = \frac{7}{9} \cdot \frac{17}{10} = \frac{119}{90} = 1,3(2)$.

3. Записать в виде обыкновенной дроби:

1) 0,(6). Решение: пусть $x = 0,(6)$, тогда $10x = 6,(6)$. Вычтем из первого равенства второе, получим: $9x = 6$, $x = \frac{2}{3}$. Ответ: $x = \frac{2}{3}$.

2) 1,(55). Решение: пусть $x = 1,(55)$, тогда $100x = 155,(55)$. Вычтем из первого равенства второе, получим: $99x = 154$, $x = \frac{154}{99} = \frac{14}{9}$. Ответ: $x = 1\frac{5}{9}$.

3) 0,1(2). Решение: пусть $x = 0,1(2)$, тогда $10x = 1,(2)$; $100x = 12,(2)$. Отсюда:

$$100x - 10x = 90x = 11, \quad x = \frac{11}{90}. \quad \text{Ответ: } x = \frac{11}{90};$$

4) -0,(8). Решение: пусть $x = -0,(8)$, тогда $10x = -8,(8)$. Вычтем из первого равенства второе, получим: $9x = -8$, $x = -\frac{8}{9}$. Ответ: $x = -\frac{8}{9}$.

5) -3,(27). Решение: пусть $x = -3,(27)$, тогда $100x = -327,(27)$. Таким образом получаем: $99x = -324$, $x = -\frac{324}{99} = -\frac{36}{11}$. Ответ: $x = -3\frac{3}{11}$.

6) -2,3(82). Решение: $x = -2,3(82)$, тогда $10x = -23,(82)$; $1000x = 2382,(82)$.

Отсюда: $1000x - 10x = 990x = -2359$, $x = -\frac{2359}{990} = -2\frac{379}{990}$. Ответ: $-2\frac{379}{990}$.

4. Вычислить:

$$1) (20,88 : 18 + 45 : 0,36) : (19,59 + 11,95) = \left(20\frac{22}{25} : 18 + 45 : \frac{9}{25} \right) : 31,54 =$$

$$= \left(\frac{522}{25} \cdot \frac{1}{18} + 45 \cdot \frac{25}{9} \right) : 31\frac{27}{50} = \left(\frac{29}{25} + 125 \right) : \frac{1577}{50} = \frac{3154}{25} \cdot \frac{50}{1577} = 4.$$

$$2) \frac{7}{36} \cdot 9 + 8 \cdot \frac{11}{32} + \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{18} = \frac{7 \cdot 9}{4 \cdot 9} + \frac{8 \cdot 11}{4 \cdot 8} + \frac{9 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 9} = \frac{7}{4} + \frac{11}{4} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}.$$

5. Вычислить:

$$1) \left(3\frac{4}{25} + 0,24 \right) 2,15 + \left(5,1625 - 2\frac{3}{16} \right) \frac{2}{5} = \left(\frac{79}{25} + \frac{24}{100} \right) \cdot \frac{215}{100} + (5,1625 - 2,1875) \cdot \frac{2}{5} =$$

$$= \frac{350}{100} \cdot \frac{215}{100} + \frac{2975}{1000} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8500}{1000} = 8,5.$$

$$2) 0,364 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : 0,125 + 2\frac{1}{2} \cdot 0,8 = \frac{364 \cdot 25}{1000 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 1000}{16 \cdot 125} + \frac{5 \cdot 8}{2 \cdot 10} =$$

$$= \frac{52}{40} + \frac{5}{2} + 2 = \frac{13}{10} + 2,5 + 2 = 1,3 + 4,5 = 5,8.$$

§2. Действительные числа

Основные понятия:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

6. Ответы: 1) нет; 2) нет; 3) да; 4) нет (т.к. в дробной части встречается сколько угодно длинная последовательность единиц).

7. $\sqrt{31} \approx 5,567764\dots$ Таким образом, $5,5 < \sqrt{31} < 5,6$.

8. Какое из равенств $|x| = x$ или $|x| = -x$ является верным, если:

1) $x = 5 - \sqrt{7}$. Решение: т.к. $5 > \sqrt{7}$, то $5 - \sqrt{7} > 0$, следовательно $|x| = x$.

2) $x = 4 - 3\sqrt{3}$. Решение: $4 < 3\sqrt{3}$, т.к. $4^2 < (3\sqrt{3})^2 = 27$, значит $|x| = -x$.

3) $x = 5 - \sqrt{10}$. Решение: $5 > \sqrt{10}$, т.к. $5^2 > 10$, значит $|x| = x$.

9. Выяснить, каким числом (иррациональным или рациональным) является выражение:

1) $(\sqrt{8} - 3)(3 + 2\sqrt{2}) = 3\sqrt{8} - 9 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - 6\sqrt{2} = 3 \cdot 2\sqrt{2} - 9 + 2 \cdot 4 - 6\sqrt{2} = -1$.

Ответ: рациональное число.

2) $(\sqrt{27} - 2)(2 - 3\sqrt{3}) = -(2 - 3\sqrt{3})(2 - 3\sqrt{3}) = -(2 - 3\sqrt{3})^2 = -4 - 27 + 12\sqrt{3} = 12\sqrt{3} - 31$

Ответ: иррациональное число.

3) $(\sqrt{50} + 4\sqrt{2})\sqrt{2} = (5\sqrt{2} + 4\sqrt{2})\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 18$.

Ответ: рациональное число.

4) $(5\sqrt{3} + \sqrt{27}) : \sqrt{3} = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) : \sqrt{3} = 8\sqrt{3} : \sqrt{3} = 8$.

Ответ: рациональное число.

5) $(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 = 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3 + 1 + 2\sqrt{3} = 8$.

Ответ: рациональное число.

6) $(\sqrt{5} - 1)^2 - (2\sqrt{5} + 1)^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 - 4 \cdot 5 - 4\sqrt{5} - 1 = -15 - 6\sqrt{5}$.

Ответ: иррациональное число.

10. 1) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{28} = \sqrt{7 \cdot 3^2} \cdot \sqrt{2^2 \cdot 7} = 3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$;

2) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 10$;

3) $\sqrt{50} : \sqrt{8} = \sqrt{5^2 \cdot 2} : \sqrt{2^2 \cdot 2} = 5 : 2 = 2,5$;

4) $\sqrt{12} : \sqrt{27} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$.

11. Сравнить числовые значения выражений:

1) $\sqrt{3,9} + \sqrt{8}$ и $\sqrt{1,1} + \sqrt{17}$. Решение: $\sqrt{3,9} < 2$, $\sqrt{8} < 3$, следовательно

$\sqrt{3,9} + \sqrt{8} < 5$. С другой стороны, $\sqrt{1,1} > 1$, $\sqrt{17} > 4$, значит

$\sqrt{1,1} + \sqrt{17} > 5$. Ответ: $\sqrt{3,9} + \sqrt{8} < \sqrt{1,1} + \sqrt{17}$.

2) $\sqrt{11} - \sqrt{2,1}$ и $\sqrt{10} - \sqrt{3,1}$. Решение: сравним числа $\sqrt{11} + \sqrt{3,1}$ и

$\sqrt{10} + \sqrt{2,1}$. Очевидно, что $\sqrt{11} + \sqrt{3,1} > \sqrt{10} + \sqrt{2,1}$, следовательно $\sqrt{11} - \sqrt{2,1} > \sqrt{10} - \sqrt{3,1}$. Ответ: $\sqrt{11} - \sqrt{2,1} > \sqrt{10} - \sqrt{3,1}$.

12. Вычислить:

$$1) \sqrt{(\sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = \sqrt{10}.$$

$$2) \sqrt{(\sqrt{16-6\sqrt{7}} + \sqrt{7}) \cdot 3} = \sqrt{(\sqrt{(3-\sqrt{7})^2} + \sqrt{7}) \cdot 3} = \sqrt{3 \cdot 3} = 3.$$

$$3) \sqrt{(\sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{8-2\sqrt{15}}) \cdot 2+7} = \sqrt{(\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}) \cdot 2+7} = \\ = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) \cdot 2+7} = \sqrt{4\sqrt{3}+7} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}.$$

§3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Основные понятия:

Последовательность b_1, b_2, \dots, b_n называется геометрической прогрессией, если $b_{n+1} = b_n \cdot q \quad \forall n \in \mathbb{N}$, где $b_n \neq 0, q \neq 0$.

Свойства:

1°. $b_{n+1} = b_1 \cdot q^n$;

2°. $b_{n-1}b_{n+1} = b_n^2, b_{n-k}b_{n+k} = b_n^2, k = 1, 2, \dots, n-1$;

3°. Сумма первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \begin{cases} nb_1, & \text{если } q = 1 \\ b_1 \frac{(1-q^n)}{1-q}, & \text{если } q \neq 1 \end{cases}$$

4°. Если $|q| < 1$, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, причем $S = \frac{b_1}{1-q}$.

13. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

1) $b_n = -5^{2n}$. Решение: $b_n = -5^{2n} = -25^n = (-25) \cdot (25)^{n-1}$, т.е. $b_1 = -25$; $q = 25$. Ответ: b_n – геометрическая прогрессия.

2) $b_n = 2^{3n}$. Решение: $b_n = 2^{3n} = 8^n = 8 \cdot 8^{n-1}$, т.е. $b_1 = 8, q = 8$.

Ответ: b_n – геометрическая прогрессия.

14. 1) Решение: $b_4 = b_1 q^3$, т.е. $88 = b_1 \cdot 2^3$, откуда $b_1 = 11$. Следовательно,

$$S_5 = \frac{b_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{11(1-32)}{1-2} = 31 \cdot 11 = 341. \text{ Ответ: } S_5 = 341.$$

2) Решение: $b_4 = b_1 q^3$, т.е. $88 = 11 \cdot q^3$, откуда $q = 2$. Следовательно,

$$S_5 = \frac{b_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{11(1-32)}{1-2} = 31 \cdot 11 = 341. \text{ Ответ: } S_5 = 341.$$

15. Указание: 1) $q = \frac{1}{5}$; 2) $q = \frac{1}{3}$; 3) $q = \frac{1}{3}$; 4) $q = \frac{1}{2}$.

16. 1) $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-20}{40} = -\frac{1}{2}$. $|q| < 1$, значит прогрессия бесконечно убывающая.

2) $q^4 = \frac{b_{11}}{b_7} = \frac{1}{16}$, т.е. $q = \pm \frac{1}{2}$. $|q| < 1$, значит прогрессия бесконечно убывающая.

3) $q = \frac{b_7}{b_6} = \frac{-30}{15} = -2$. $|q| > 1$, прогрессия не является бесконечно убывающей.

4), т.е. $q = -\frac{1}{3}$. $|q| < 1$, прогрессия бесконечно убывающая.

17. 1) Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_n = \frac{1}{4^n}$. В данной прогрессии

$q = \frac{1}{4}$, $|q| < 1$, значит прогрессия бесконечно убывает и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} = 0$.

2) Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_n = (0,2)^n$. $q = 0,2$, т.е. $|q| < 1$, значит прогрессия бесконечно убывает и $\lim_{n \rightarrow \infty} (0,2)^n = 0$.

3) Решение: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{7^n}\right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7^n}$. Прогрессия $b_n = \frac{1}{7^n}$ является бесконечно убывающей, следовательно $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{7^n}\right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7^n} = 1 + 0 = 1$.

4) Решение: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2\right) = -2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$. Прогрессия $b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$ является бесконечно убывающей, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2\right) = -2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = -2 + 0 = -2$.

18. 1) Решение: $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$. Ответ: $S = \frac{1}{12}$.

2) Решение: $b_3 = b_1 q^4$, откуда $b_1 = 1$. $S = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = 1,5$. Ответ: $S = 1,5$.

3) Решение: $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{9}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{9}{\frac{4}{3}} = \frac{27}{4} = 6,75$. Ответ: $S = 6,75$.

4) Решение: $b_4 = b_1 q^3$, откуда $b_1 = -1$. $S = \frac{-1}{1 - (-\frac{1}{2})} = -\frac{2}{3}$. Ответ: $S = -\frac{2}{3}$.

19. Найти сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

1) $6; 1; \frac{1}{6}; \dots$

Решение: $b_1 = 6$, $b_2 = 1$, т.е. $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{6}$. $S = \frac{6}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{36}{5} = 7,2$. Ответ: $7,2$.

2) $-25; -5; -1; \dots$

Решение: $b_1 = -25$; $b_2 = -5$, т.е. $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$. $S = \frac{-25}{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{125}{4} = -31,25$.

Ответ: $-31,25$.

20. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби.

1) $0,(5)$. Решение: рассмотрим последовательность: $a_1 = 0,5$; $a_2 = 0,05$; $a_3 = 0,005$; ... Таким образом данную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии $0,5; 0,05; 0,005; \dots$, где $b_1 = 0,5$, а $q = 0,1$. Следовательно, сумма равна

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{0,5}{1-0,1} = \frac{5}{9}. \text{ Ответ: } 0,(5) = \frac{5}{9}.$$

2) $0,(8)$. Решение: представим дробь в виде бесконечной убывающей геометрической прогрессии: $0,8; 0,08; 0,008; \dots$ (см. п.1). $b_1 = 0,8$, $q = 0,1$.

Т.е. $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{0,8}{1-0,1} = \frac{8}{9}$. Ответ: $0,(8) = \frac{8}{9}$.

3) $0,(32)$. Решение: представим дробь в виде бесконечной убывающей геометрической прогрессии: $0,32; 0,0032; 0,000032; \dots$ (см. п.1). $b_1 = 0,32$,

$$q = 0,01. \text{ Т.е. } S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{0,32}{1-0,01} = \frac{32}{99}. \text{ Ответ: } 0, (32) = \frac{32}{99}.$$

4) 0,2(5). Решение: рассмотрим последовательность: $a_1 = 0,2$; $a_2 = 0,2 + 0,05$; $a_3 = 0,2 + 0,05 + 0,005$; $a_4 = 0,2 + 0,05 + 0,005 + 0,0005$, ... Т.е. данную дробь можно представить в виде суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии $0,05; 0,005; \dots$ и числа $0,2$. Таким обра-

$$\text{зом } 0,2(5) = 0,2 + \frac{0,05}{1-0,1} = \frac{1}{5} + \frac{5}{90} = \frac{23}{90}. \text{ Ответ: } 0,2(5) = \frac{23}{90}.$$

21. 1) Указание: $q = -2$, $|q| > 1$. Следовательно, не является.

2) Указание: $q = 4$, $|q| > 1$. Следовательно, не является.

3) Указание: $b_n = -8 \cdot 3 \left(-\frac{1}{3}\right)^n$, $q = -\frac{1}{3}$, $|q| < 1$. Т.е. b_n является бесконечной убывающей геометрической прогрессией.

4) Указание: $b_n = -3 \cdot 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $q = -\frac{1}{2}$, $|q| < 1$. Т.е. b_n является бесконечной убывающей геометрической прогрессией.

22. 1) Решение: $b_5 = b_1 q^4$, откуда $b_1 = \sqrt{2}$. $S = \frac{\sqrt{2}}{1-1/2} = 2\sqrt{2}$. Ответ: $2\sqrt{2}$.

2) Решение: $b_4 = b_1 q^3$, откуда $b_1 = \sqrt{3}$. $S = \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}/2} = 2\sqrt{3}(2+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}+6$

23. 1) Решение: $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{b_1}{1-1/5} = 30$, откуда $b_1 = 30(1-1/5) = 24$. Ответ: 24.

2) Решение: $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{20}{1-q} = 30$, откуда $1-q = 20:30 = 2/3$. Ответ: $1/3$.

24. 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-2^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2^n} - 1 \right) = -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2^n} = 1$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} + 2}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \cdot 3^n + 2}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{2}{3^n} \right) = 9 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3^n} = 9$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5^n + 1)^2}{5^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{2n} + 2 \cdot 5^n + 1}{5^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{5^n} + \frac{1}{25^n} \right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{5^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{25^n} = 1$.

25. Указание: высота фигуры равна сумме бесконечной убывающей геометрической прогрессии $a + a/2 + a/4 + \dots$

26. В угол, равный 60° , последовательно вписаны окружности, касающиеся друг друга (рис. 1). Радиус первой окружности равен R_1 . Найдите радиусы R_2, R_3, \dots, R_n остальных окружностей и покажите, что они образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию. Докажите, что сумма $R_1 + 2(R_2 + R_3 + \dots + R_n + \dots)$ равна расстоянию от центра первой окружности до вершины угла.

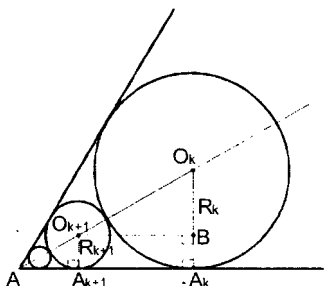


Рис. 1

Решение: рассмотрим два последовательных радиуса R_k и R_{k+1} . В прямоугольной трапеции $A_k O_k O_{k+1} A_{k+1}$ опустим высоту $O_{k+1} B$, тогда в прямоугольном треугольнике $O_{k+1} B O_k$ $\angle O_k O_{k+1} B = 30^\circ$, $O_{k+1} O_k = R_k + R_{k+1}$ и $O_k B = R_k - R_{k+1}$, т.е. $R_k - R_{k+1} = \frac{1}{2}(R_k + R_{k+1})$, откуда $R_{k+1} = \frac{1}{3} R_k$, т.е. R_k образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию со зна-

менателем $q = \frac{1}{3}$. $R_2 + R_3 + \dots = \frac{\frac{1}{3} R_1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{R_1}{2}$. Расстояние $A_1 O = 2R_1$ (т.к.

$\angle A_1 A O = 30^\circ$), кроме того, $R_1 + 2(R_2 + R_3 + \dots) = R_1 + 2 \frac{R_1}{2} = 2R_1$, ч.т.д.

§4. Арифметический корень натуральной степени

Свойства ($n, m \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$, $m \geq 2$):

$$1^\circ. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad a, b \geq 0; \quad 2^\circ. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \quad a \geq 0, \quad b > 0;$$

$$3^\circ. (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}; \quad a \geq 0; \quad 4^\circ. \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}; \quad a \geq 0;$$

$$5^\circ. \sqrt[k]{a^{2k}} = |a|; \quad k \geq 1, \quad a \in \mathbb{R}; \quad 6^\circ. \sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}; \quad a \geq 0, \quad k \geq 1.$$

$$27. 1) 1; 0; 4; 0,9; 13; \frac{1}{17}.$$

$$2) 1; 0; 5; \frac{1}{3}; 0,3; 0,4.$$

$$3) 0; 1; 2; \frac{2}{3}; \frac{4}{5}; 0,2.$$

$$28. 1) \sqrt[4]{36^3} = \sqrt[4]{(6^2)^3} = \sqrt[4]{6^6} = 6; \quad 2) \sqrt[12]{64^2} = \sqrt[12]{(2^6)^2} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2;$$

$$3) \sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^4} = \frac{1}{5}; \quad 4) \sqrt[3]{225^4} = \sqrt[3]{(15^2)^4} = \sqrt[3]{15^8} = 15.$$

$$29. 1) \sqrt[3]{10^6} = (\sqrt[3]{10})^6 = 10^2 = 100; \quad 2) \sqrt[3]{3^{12}} = \sqrt[3]{(3^4)^3} = 3^4 = 81;$$

$$3) \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}} = \sqrt[4]{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}; \quad 4) \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}} = \sqrt[4]{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)^4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}.$$

$$30. 1) \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2; \quad 2) \sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1;$$

$$3) \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{3}\right)^3} = -\frac{1}{3}; \quad 4) \sqrt[5]{-1024} = \sqrt[5]{(-4)^5} = -4;$$

$$5) \sqrt[3]{-34^3} = \sqrt[3]{(-34)^3} = -34; \quad 6) \sqrt[7]{-8^7} = -\sqrt[7]{8^7} = -8.$$

31. Решить уравнение:

$$1) x^4 = 256. \text{ Решение: } x^4 = 256; x = \pm\sqrt[4]{256} = \pm\sqrt[4]{4^4} = \pm 4. \text{ Ответ: } x = \pm 4.$$

$$2) x^5 = -\frac{1}{32}. \text{ Решение: } x = \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^5} = -\frac{1}{2}. \text{ Ответ: } x = -\frac{1}{2}.$$

$$3) 5x^5 = -160. \text{ Решение: } x^5 = -32; x = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2. \text{ Ответ: } x = -2.$$

$$4) 2x^6 = 128. \text{ Решение: } x^6 = 64; x = \pm\sqrt[6]{64} = \pm\sqrt[6]{2^6} = \pm 2. \text{ Ответ: } x = \pm 2.$$

$$32. 1) \sqrt[3]{-125} + \frac{1}{8}\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{(-5)^3} + \frac{1}{8}\sqrt[6]{2^6} = -5 + \frac{1}{8} \cdot 2 = -4\frac{3}{4}.$$

$$2) \sqrt[3]{32} - 0,5\sqrt[3]{-216} = \sqrt[3]{2^5} + 0,5\sqrt[3]{6^3} = 2 + 3 = 5.$$

$$3) -\frac{1}{3}\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625} = -\frac{1}{3}\sqrt[4]{3^4} + \sqrt[4]{5^4} = -1 + 5 = 4.$$

$$4) \sqrt[3]{-1000} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{256} = -\sqrt[3]{10^3} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{4^4} = -10 - 1 = -11.$$

$$5) \sqrt[3]{\frac{1}{243}} + \sqrt[3]{-0,001} - \sqrt[4]{0,0016} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^5} + \sqrt[3]{(-0,1)^3} - \sqrt[4]{0,2^4} = \frac{1}{3} - 0,1 - 0,2 = \frac{1}{30}.$$

$$33. 1) \sqrt[3]{343 \cdot 0,125} = \sqrt[3]{7^3 \cdot 0,5^3} = 7 \cdot 0,5 = 3,5.$$

$$2) \sqrt[3]{512 \cdot 216} = \sqrt[3]{8^3 \cdot 6^3} = 8 \cdot 6 = 48.$$

$$3) \sqrt[3]{32 \cdot 100000} = \sqrt[3]{2^5 \cdot 10^5} = 2 \cdot 10 = 20.$$

$$34. 1) \sqrt[3]{5^3 \cdot 7^3} = \sqrt[3]{(5 \cdot 7)^3} = 5 \cdot 7 = 35.$$

$$2) \sqrt[4]{11^4 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{(11 \cdot 3)^4} = 11 \cdot 3 = 33.$$

$$3) \sqrt[5]{(0,2)^5 \cdot 8^5} = \sqrt[5]{(0,2 \cdot 8)^5} = 0,2 \cdot 8 = 1,6.$$

$$4) \sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot 21^7} = \sqrt[7]{\left(\frac{1}{3} \cdot 21\right)^7} = \frac{21}{3} = 7.$$

$$35. 1) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{2 \cdot 500} = \sqrt[3]{1000} = 10.$$

$$2) \sqrt[3]{0,2} \cdot \sqrt[3]{0,04} = \sqrt[3]{0,2 \cdot 0,04} = \sqrt[3]{0,008} = 0,2.$$

$$3) \sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{324 \cdot 4} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 4 \cdot 4} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2^4} = 6.$$

$$4) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \cdot 16} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = 2.$$

$$36. 1) \sqrt[3]{3^{10} \cdot 2^{15}} = \sqrt[3]{(3^2)^3 \cdot (2^3)^3} = 3^2 \cdot 2^3 = 9 \cdot 8 = 72.$$

$$2) \sqrt[3]{2^3 \cdot 5^6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot (5^2)^3} = 2 \cdot 5^2 = 50.$$

$$3) \sqrt[4]{3^{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8} = \sqrt[4]{(3^3)^4 \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^4} = 3^3 \cdot \frac{1}{3^2} = 3.$$

$$4) \sqrt[10]{4^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}} = \sqrt[10]{4^{30}} \cdot \sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}} = (\sqrt[10]{4})^{30} \cdot \left(\sqrt[10]{\frac{1}{2}}\right)^{20} = 4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 16.$$

$$37. 1) \sqrt[3]{64x^3z^6} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{z^6} = 4xz^2.$$

$$2) \sqrt[4]{a^8b^{12}} = \sqrt[4]{a^8} \cdot \sqrt[4]{b^{12}} = a^2b^3.$$

$$3) \sqrt[5]{32x^{10}y^{20}} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{x^{10}} \cdot \sqrt[5]{y^{20}} = 2x^2y^4.$$

$$4) \sqrt[6]{a^{12}b^{18}} = \sqrt[6]{a^{12}} \cdot \sqrt[6]{b^{18}} = a^2b^3.$$

$$38. 1) \sqrt[3]{2ab^2} \cdot \sqrt[3]{4a^2b} = \sqrt[3]{2ab^2 \cdot 4a^2b} = \sqrt[3]{2^3 a^3 b^3} = 2ab.$$

$$2) \sqrt[4]{3a^2b^3} \cdot \sqrt[4]{27a^2b} = \sqrt[4]{3a^2b^3 \cdot 27a^2b} = \sqrt[4]{3^4 a^4 b^4} = 3ab.$$

$$3) \sqrt[4]{\frac{ab}{c}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^3c}{b}} = \sqrt[4]{\frac{ab}{c} \cdot \frac{a^3c}{b}} = \sqrt[4]{a^4} = a.$$

$$4) \sqrt[3]{\frac{16a}{b^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2ab}} = \sqrt[3]{\frac{16a}{b^2} \cdot \frac{1}{2ab}} = \sqrt[3]{\frac{8}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{2}{b}.$$

$$39. 1) \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \sqrt[3]{\frac{4^3}{5^3}} = \frac{4}{5}.$$

$$2) \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \sqrt[4]{\frac{2^4}{3^4}} = \frac{2}{3}.$$

$$3) \sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \frac{3}{2}.$$

$$4) \sqrt[5]{7\frac{19}{32}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{3}{2}.$$

$$40. 1) \sqrt[4]{324} : \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{\frac{324}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3.$$

$$2) \sqrt[3]{128} : \sqrt[3]{2000} = \sqrt[3]{\frac{128}{2000}} = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

$$3) \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

$$4) \frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}} = \sqrt[5]{\frac{256}{8}} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

$$5) (\sqrt{25} - \sqrt{45}) : \sqrt{5} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} - \sqrt{9} = \sqrt{5} - 3.$$

$$6) (\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{5}) : \sqrt[3]{5} = \frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{625}{5}} - 1 = \sqrt[3]{125} - 1 = 4.$$

$$41. 1) \sqrt[3]{a^6b^7} : \sqrt[3]{ab^2} = \sqrt[3]{\frac{a^6b^7}{ab^2}} = ab.$$

$$2) \sqrt[3]{81x^4y} : \sqrt[3]{3xy} = \sqrt[3]{\frac{81x^4y}{3xy}} = 3x.$$

$$3) \sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}} : \sqrt[3]{\frac{y}{9x^2}} = \sqrt[3]{\frac{3x}{y^2} \cdot \frac{9x^2}{y}} = \frac{3x}{y}.$$

$$4) \sqrt[4]{\frac{2b}{a^3}} : \sqrt[4]{\frac{a}{8b^3}} = \sqrt[4]{\frac{2b}{a^3} \cdot \frac{8b^3}{a}} = \frac{2b}{a}.$$

$$42. 1) (\sqrt[6]{7^3})^2 = \sqrt[6]{7^6} = 7.$$

$$2) (\sqrt[6]{9})^{-3} = (\sqrt[6]{3^2})^{-3} = \sqrt[6]{3^{-6}} = \sqrt[6]{\frac{1}{3^6}} = \frac{1}{3}.$$

$$3) (\sqrt[10]{32})^2 = \sqrt[10]{(2^5)^2} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2.$$

$$4) (\sqrt[8]{16})^4 = \frac{1}{(\sqrt[8]{16})^4} = \frac{1}{\sqrt[8]{16^4}} = \frac{1}{\sqrt[8]{4^8}} = 0,25$$

$$43. 1) \sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3.$$

$$2) \sqrt{\sqrt[10]{1024}} = \sqrt[20]{1024} = \sqrt[20]{2^{10}} = 2.$$

$$3) \sqrt[3]{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[3]{3^7} = \sqrt[9]{9} \cdot \sqrt[3]{3^7} = \sqrt[9]{9 \cdot 3^7} = \sqrt[9]{3^9} = 3.$$

$$4) \sqrt[4]{\sqrt{25}} \cdot \sqrt[6]{5^5} = \sqrt[12]{5^2} \cdot \sqrt[12]{5^{10}} = \sqrt[12]{5^{12}} = 5.$$

$$44. 1) (\sqrt[6]{x})^6 = x^2.$$

$$2) (\sqrt[3]{y^2})^3 = y^2.$$

$$3) (\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b})^6 = a^3 b^2.$$

$$4) (\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3})^{12} = (a^2)^4 \cdot (b^3)^3 = a^8 b^9.$$

$$5) \left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2 b}}\right)^6 = \left(\sqrt[6]{a^2 b}\right)^6 = a^2 b.$$

$$6) \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}}\right)^4 = \left(\sqrt[12]{27a^3}\right)^4 = \sqrt[3]{27a^3} = 3a$$

45. При каких x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$. Решение: корень четной степени существует только у неотрицательных чисел, т.е. $2x-3 \geq 0$. Отсюда $x \geq \frac{3}{2}$. Ответ: $x \geq \frac{3}{2}$.

2) $\sqrt[6]{x+3}$. Решение: корень четной степени существует только у неотрицательных чисел, т.е. $x+3 \geq 0$. Отсюда $x \geq -3$. Ответ: $x \geq -3$.

3) $\sqrt[6]{2x^2-x-1}$. Решение: корень четной степени существует только у неотрицательных чисел, т.е. $2x^2-x-1 \geq 0$, $(2x+1)(x-1) \geq 0$. Отсюда $x \leq -0,5$, $x \geq 1$. Ответ: $x \leq -0,5$, $x \geq 1$.

4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-7}}$. Решение: корень четной степени существует только у неотрицательных чисел, т.е. $\frac{2-3x}{2x-7} \geq 0$. Т.е. $\begin{cases} 2-3x \geq 0 \\ 2x-7 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2-3x \leq 0 \\ 2x-7 < 0 \end{cases}$. Первая

система решений не имеет, из второй системы получаем: $\frac{2}{3} \leq x < 2$.

Ответ: $\frac{2}{3} \leq x < 2$.

$$46. 1) \sqrt{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9-\sqrt{17}} = \sqrt{(9+\sqrt{17})(9-\sqrt{17})} = \sqrt{81-17} = \sqrt{64} = 8.$$

$$2) \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3+\sqrt{5} - 2\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}} + 3-\sqrt{5} = 6-2\sqrt{9-5} = 2.$$

$$3) \left(\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2 = 5+\sqrt{21} + 2\sqrt{5^2 - (\sqrt{21})^2} + 5-\sqrt{21} = 10+2\sqrt{25-21} = 14$$

$$47. 1) \frac{\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}} = \sqrt[3]{\frac{49 \cdot 112}{250}} = \sqrt[3]{\frac{49 \cdot 7 \cdot 8}{125}} = \frac{7 \cdot 2}{5} = 2,8.$$

$$2) \frac{\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{54 \cdot 120}{5}} = \sqrt[4]{2 \cdot 27 \cdot 3 \cdot 8} = 2 \cdot 3 = 6.$$

$$3) \frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[4]{27^2} - \sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{27} - \sqrt[4]{64} = 2 + 3 - 2 = 3.$$

$$4) \sqrt[3]{3\frac{3}{8}} + \sqrt[4]{18} \cdot \sqrt[4]{4\frac{1}{2}} - \sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} + \sqrt[4]{18 \cdot \frac{9}{2}} - \sqrt{16} = \frac{3}{2} + 3 - 4 = 0,5.$$

$$5) \sqrt[3]{11 - \sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11 + \sqrt{57}} = \sqrt[3]{(11 - \sqrt{57})(11 + \sqrt{57})} = \sqrt[3]{121 - 57} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

$$6) \sqrt[4]{17 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17 + \sqrt{33}} = \sqrt[4]{(17 - \sqrt{33})(17 + \sqrt{33})} = \sqrt[4]{17^2 - 33} = \sqrt[4]{289 - 33} = 4.$$

$$48. 1) \sqrt[3]{2ab} \cdot \sqrt[3]{4a^2b} \cdot \sqrt[3]{27b} = \sqrt[3]{2ab \cdot 4a^2b \cdot 27b} = \sqrt[3]{2^3 \cdot a^3 b^3 \cdot 3^3} = 6ab.$$

$$2) \sqrt[4]{abc} \cdot \sqrt[4]{a^3b^2c} \cdot \sqrt[4]{b^5c^2} = \sqrt[4]{abc \cdot a^3b^2c \cdot b^5c^2} = \sqrt[4]{a^4b^8c^4} = ab^2c.$$

$$49. 1) \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}} + \left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^4}}\right)^3 = \sqrt[3]{a^6} + \left(\sqrt[3]{a^2}\right)^3 = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

$$2) \left(\sqrt[3]{\sqrt{x^2}}\right)^3 + 2\left(\sqrt[4]{\sqrt{x}}\right)^8 = (\sqrt{x})^3 + 2(\sqrt{x})^8 = x + 2x = 3x.$$

$$3) \sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}} - \left(\sqrt[3]{xy^2}\right)^5 = \sqrt[6]{x^6y^{12}} - xy^2 = xy^2 - xy^2 = 0.$$

$$4) \left(\left(\sqrt[5]{a^5\sqrt{a}}\right)^5 - \sqrt[5]{a}\right) : \sqrt[5]{a^2} = (a^5\sqrt{a} - \sqrt[5]{a}) : \sqrt[5]{a} = a - 1.$$

$$50. 1) \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{(3^2)^2}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3 \cdot 3^4}{3}} = \sqrt[6]{3^6} = 3.$$

$$2) \frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}} = \frac{\sqrt[12]{7^4} \cdot \sqrt[12]{(7^3)^4}}{\sqrt[12]{7}} = \sqrt[12]{7^{4+9-1}} = \sqrt[12]{7^{12}} = 7.$$

$$3) \left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}\right)\sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} = 3 - 2 = 1.$$

51. Упростить: 1) $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ при а) $x \geq 2$; б) $x < 2$.

Решение: $\sqrt[3]{(x-2)^3} = x-2$, т.к. корень нечетной степени. Ответ: а), б) $x-2$

2) $\sqrt{(3-x)^6}$ при а) $x \leq 3$; б) $x > 3$.

Решение: $\sqrt{(3-x)^6} = |(3-x)^3| = \begin{cases} (3-x)^3 & \text{при } x \leq 3 \\ (x-3)^3 & \text{при } x > 3 \end{cases}$. Ответ: а) $(3-x)^3$
б) $(x-3)^3$.

3) $\sqrt[4]{(x+6)^4} + \sqrt{(x-3)^2}$, если $-1 < x < 2$.

Решение: $\sqrt[4]{(x+6)^4} + \sqrt{(x-3)^2} = |x+6| + |x-3| = x+6 - x+3 = 9$, поскольку

$x+6 > 0$, $x-3 < 0$ при $-1 < x < 2$. Ответ: 9.

4) $\sqrt[4]{(2x+1)^6} - \sqrt[4]{(4+x)^4}$, если $-3 < x < -1$.

Решение: $\sqrt[4]{(2x+1)^6} - \sqrt[4]{(4+x)^4} = |2x+1| - |4+x| = -2x-1-4-x = -3x-5$, т.к. $2x+1 < 0$, $4+x > 0$ при $-3 < x < -1$. Ответ: $-3x-5$.

52. Сравнить значения выражений:

1) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30}$ и $\sqrt[3]{63}$. Решение: $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30} > \sqrt{1} + \sqrt[3]{27} = 4$, а $\sqrt[3]{63} < \sqrt[3]{64} = 4$,

т.е. $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30} > \sqrt[3]{63}$. Ответ: $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30} > \sqrt[3]{63}$.

2) Указание: сравните каждое число с числом 6.

53. Доказать, что:

1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}} = 2$. Решение: преобразуем левую часть:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = 2, \text{ ч.т.д.}$$

2) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$. Решение: преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} &= \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\frac{72+32\sqrt{5}}{8}} + \sqrt[3]{\frac{72-32\sqrt{5}}{8}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{72+32\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{72-32\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{(3+\sqrt{5})^3} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{(3-\sqrt{5})^3} = 3, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 54. 1) \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} &= \frac{(\sqrt[4]{a})^2 - (\sqrt[4]{b})^2}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{(\sqrt[4]{a})^2 + \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} = \\ &= \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} - \frac{\sqrt[4]{a} \cdot (\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{b}. \end{aligned}$$

2) Указание: $a \pm b = (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}) (\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$.

3) Указание: $a + b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$.

§5. Степень с рациональным и действительным показателем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ при } a \geq 0, n \geq 2, m \in \mathbb{Z}.$$

Свойства ($a > 0$, $n \geq 2$, $m \in \mathbb{Z}$, $p, q \in \mathbb{R}$):

$$1^\circ. a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}};$$

$$2^\circ. a^p a^q = a^{p+q};$$

$$3^\circ. a^p : a^q = a^{p-q};$$

$$4^\circ. (a^p)^q = a^{pq};$$

5°. $(ab)^p = a^p \cdot b^p \quad (b > 0)$;

6°. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \quad (b > 0)$;

7°. $a > 1, p < q \Rightarrow a^p < a^q$;

8°. $0 < a < 1, p < q \Rightarrow a^p > a^q$;

9°. $a^p > 0$ для $\forall a > 0, \forall p$;

57. 1) $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$.

2) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

3) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = 2^2 = 4$.

4) $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = 3^3 = 27$.

5) $16^{-0,75} = 16^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{16}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

6) $9^{-1,5} = 9^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

58. 1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}} = 2^{\frac{4}{5} + \frac{11}{5}} = 2^3 = 8$.

2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}} = 5^{\frac{2}{7} + \frac{5}{7}} = 5^1 = 5$.

3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 9^{\frac{3}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$.

4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}} = 4^{\frac{1}{3} - \frac{5}{6}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

5) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4} = 8^{-\frac{4}{12}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$.

59. 1) $9^{\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9^2 \cdot 27^2} = \sqrt[3]{3^{10}} = 9$.

2) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2 \cdot 49^2} = \sqrt[3]{7^6} = 49$.

3) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{144^3 \cdot 9^3} = \sqrt[4]{(12^2)^3 \cdot (3^2)^3} = \sqrt[4]{(4^2)^3} = 2^3 = 8$.

4) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{150}{6}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = 125$.

60. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = (2^{-4})^{\frac{3}{4}} + (2^{-3})^{\frac{4}{3}} = 2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$.

2) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{\frac{2}{3}} = (0,2^2)^{\frac{3}{2}} - (0,5^3)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{10}{2}\right)^3 - \left(\frac{10}{5}\right)^2 = 5^3 - 2^2 = 121$.

3) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}} = 8^{\frac{9}{7} - \frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5} + \frac{4}{5}} = 8^1 - 3^2 = -1$.

4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4} = 5^2 + (0,2)^{-3} = 25 + 5^3 = 25 + 125 = 150$.

61. 1) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt{a} = \sqrt{0,09} = 0,3$.

2) $\sqrt{b} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{27} = 3$.

3) $\frac{\sqrt{b} \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}} = b = 1,3$.

4) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5} = a = 2,7$.

$$62. 1) a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}. \quad 2) b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = b.$$

$$3) \sqrt[3]{b} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{2}}. \quad 4) a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a} = a^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = a.$$

$$5) x^{1.7} \cdot x^{2.8} : \sqrt{x^5} = x^{1.7+2.8-\frac{1}{2}} = x^4. \quad 6) y^{-3.8} : y^{-2.3} \cdot \sqrt[3]{y} = y^{-\frac{19}{5} + \frac{23}{10} + \frac{1}{3}} = y^{-\frac{7}{6}}.$$

$$63. 1) x^{\frac{1}{2}} + x = x^{\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{2}}).$$

$$2) (ab)^{\frac{1}{3}} + (ac)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}}).$$

$$3) y^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{1}{3}}(y^{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}} - 1) = y^{\frac{1}{3}}(y^{\frac{5}{12}} - 1).$$

$$4) \text{Указание: вынесите за скобки } 3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}.$$

$$64. 1) a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2 = (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}).$$

$$2) y^{\frac{2}{3}} - 1 = (y^{\frac{1}{3}})^2 - 1^2 = (y^{\frac{1}{3}} - 1)(y^{\frac{1}{3}} + 1).$$

$$3) a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{1}{6}})^2 - (b^{\frac{1}{6}})^2 = (a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}).$$

$$4) x - y = (x^{\frac{1}{2}})^2 - (y^{\frac{1}{2}})^2 = (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}).$$

$$5) 4a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} = (2a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2 = (2a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(2a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}).$$

$$6) 0,01m^{\frac{1}{6}} - n^{\frac{1}{6}} = (0,1m^{\frac{1}{12}})^2 - (n^{\frac{1}{12}})^2 = (0,1m^{\frac{1}{12}} - n^{\frac{1}{12}})(0,1m^{\frac{1}{12}} + n^{\frac{1}{12}}).$$

$$65. 1) \text{Указание: } a - x = (a^{\frac{1}{3}})^3 - (x^{\frac{1}{3}})^3.$$

$$2) \text{Указание: } x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^3 - (y^{\frac{1}{2}})^3.$$

$$3) \text{Указание: } a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{1}{6}})^3 - (b^{\frac{1}{6}})^3.$$

$$4) \text{Указание: } 27a + c^{\frac{1}{2}} = (3a^{\frac{1}{3}})^3 + (c^{\frac{1}{6}})^3.$$

$$66. 1) \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}$$

2) Указание: $m + 2\sqrt{mn} + n = \left(m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

3) Указание: $c - 2c^{\frac{1}{2}} + 1 = \left(\sqrt{c} - 1\right)^2$.

$$67. \frac{c^{\frac{3}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} - \frac{cb^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}} + \frac{2c^2 - 4cb}{c - b} = \frac{c^{\frac{3}{2}}(c^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) - cb^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}) + 2c^2 - 4cb}{c - b} =$$

$$= \frac{c^2 - c^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} + cb + 2c^2 - 4cb}{c - b} = \frac{3c^2 - 3cb}{c - b} = \frac{3c(c - b)}{c - b} = 3c.$$

68. 1) $2^{\sqrt{5}} \cdot 2^{-\sqrt{5}} = 2^{\sqrt{5} - \sqrt{5}} = 1$.

2) $3^{2\sqrt{2}} \cdot 9^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} = 1$.

3) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = 5^3 = 125$.

4) $(0,5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}} = 0,5^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

69. 1) Указание: $8^{\sqrt{5}} = 2^{3\sqrt{5}}$.

2) Указание: $9^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}$.

3) $(5^{1+\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}} = 5^{(1+\sqrt{2})(-\sqrt{2})} = 5^{1-2} = \frac{1}{5}$.

4) $(5^{1-\sqrt{5}})^{\sqrt{5}} - (\sqrt{5})^0 = 5^{(1-\sqrt{5})(\sqrt{5})} - 1 = 5^{1-5} - 1 = 5^{-4} - 1 = -\frac{624}{625}$.

70. 1) Указание: $4^{\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}}$.

2) Указание: $27^{\sqrt{3}} = 3^{3\sqrt{3}}$.

3) $9^{1+\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 3^{-2-\sqrt{3}} = 3^{2(1+\sqrt{3})} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 3^{-2-\sqrt{3}} = 3^{2+2\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}} = 3$.

4) $4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}} = 2^{2(3+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}-4-\sqrt{2}} = 2^3 = 8$.

71. 1) Указание: $10^{2+\sqrt{7}} = 2^{2+\sqrt{7}} \cdot 5^{2+\sqrt{7}}$.

2) Указание: $6^{3+\sqrt{5}} = 3^{3+\sqrt{5}} \cdot 2^{3+\sqrt{5}}$.

3) Указание: $25^{1+\sqrt{2}} = 5^{2+2\sqrt{2}}$.

4) Указание: $4^{\sqrt{3}-1} = 2^{2\sqrt{3}-2}$.

72. Выяснить, какое из чисел больше.

1) $3^{\sqrt{71}}$ или $3^{\sqrt{69}}$. Решение: $\sqrt{71} > \sqrt{69}$; $3 > 1$, следовательно $3^{\sqrt{71}} > 3^{\sqrt{69}}$.

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$. Решение: $\sqrt{3} > \sqrt{2}$; $\frac{1}{3} < 1$, значит $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

3) $4^{-\sqrt{3}}$ или $4^{-\sqrt{2}}$. Решение: $-\sqrt{3} < -\sqrt{2}$; $4 > 1$, следовательно $4^{-\sqrt{3}} < 4^{-\sqrt{2}}$.

4) Указание: $\sqrt{3} > 1,7$.

5) Указание: $1,4 < \sqrt{2}$.

6) Указание: $\pi > 3,14$.

73. 1) 2^{-2} . Решение: $2^{-2} = \frac{1}{4} < 1$. Ответ: $2^{-2} < 1$.

2) $(0,013)^{-1}$. Решение: $(0,013)^{-1} = \frac{1000}{13} > 1$. Ответ: $(0,013)^{-1} > 1$.

3) $\left(\frac{2}{7}\right)^5$. Решение: $\left(\frac{2}{7}\right)^5 < \left(\frac{7}{7}\right)^5 = 1$. Ответ: $\left(\frac{2}{7}\right)^5 < 1$.

4) $27^{1,5}$. Решение: $27^{1,5} > 1^{1,5} = 1$. Ответ: $27^{1,5} > 1$.

5) $2^{-\sqrt{5}}$. Решение: $2^{-\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}} < \left(\frac{1}{2}\right)^1 < 1$. Ответ: $2^{-\sqrt{5}} < 1$.

6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$. Решение: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^1 < 1$. Ответ: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} < 1$.

7) Указание: $\frac{\pi}{4} < 1$ и $\sqrt{5} - 2 > 0$. 8) Указание: $\frac{1}{3} < 1$ и $\sqrt{8} - 3 > 0$.

74. 1) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = a$.

2) $a^{\sqrt{3}-1} \cdot a^{\sqrt{3}+1} = a^{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1} = a^{2\sqrt{3}}$.

3) $(b^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} : b^2 = b^{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} : b^2 = b^{3-2} = b$.

75. 1) Указание: сравните числа $2^{\frac{1}{3}}$ и $3^{\frac{1}{3}}$, аналогично 72 п.1).

2) Указание: сравните числа $5^{\frac{1}{4}}$ и $7^{\frac{1}{4}}$, аналогично 72 п.1).

76. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 810000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 + \sqrt[4]{810000} - \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = 8 + 30 - \frac{3}{2} = 36,5$

2) $(0,001)^{\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{1000}}{1} - 2^{-2+6\frac{2}{3}} - 2^{-3\left(\frac{4}{3}\right)} = 10 - 2^2 - 2^{-4} = 5\frac{15}{16}$.

3) $27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3 \cdot 2}{3}} - \frac{1}{2^2} + \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = 9 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = 9\frac{5}{12}$.

77. 1) $(a^4)^{\frac{3}{4}} \cdot (b^{-\frac{2}{3}})^{-6} = a^{-3}b^4 = \frac{b^4}{a^3}$. 2) $\left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{\frac{1}{12}} = \frac{a^{6 \cdot 4 \cdot 12}}{b^{(-3)4 \cdot 12}} = a^2b$.

78. 1) Указание: вынесите за скобку $a^{-\frac{1}{3}}$ в числителе и $a^{-\frac{1}{4}}$ в знаменателе, аналогично 2).

$$2) \frac{b^{1/3}(\sqrt[3]{b^4} - \sqrt[3]{b^{-1}})}{b^{2/3}(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}})} = \frac{b^{1/3}(b^{4/3} - b^{-1/3})}{b^{2/3}(b^{1/3} - b^{-2/3})} = \frac{b^{1/3}b^{-1/3}(b-1)}{b^{2/3}b^{-2/3}(b-1)} = 1.$$

$$3) \frac{a^{2/3}b^{-1} - a^{-1/3}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} = \frac{a^{-1/3}b^{-1}(a^2 - b)}{a^{2/3} - b^{2/3}} = \frac{(a^2 - b)}{a^{1/3}(a^{2/3} - b^{2/3})} = \frac{(a^2 - b)}{ab - a^{1/3}b^{2/3}}.$$

4) Указание: вынесите за скобку $a^{1/3}b^{1/3}$ в числителе.

$$79. 1) \left(2^{2/3} \cdot 3^{-1/3} - 3^{2/3} \cdot 2^{-1/3}\right) \cdot \sqrt[3]{6} = \left(2^{2/3} \cdot 3^{-1/3} - 3^{2/3} \cdot 2^{-1/3}\right) \cdot 3^{1/3} \cdot 2^{1/3} = 2^2 - 3^2 = -5.$$

2) Указание: $\sqrt[3]{1000} = 2^{3/4} \cdot 5^{3/4}$, аналогично 1).

$$80. 1) a^{1/6} \cdot \sqrt[6]{a^3 \sqrt{a}} = a^{1/6} \left(aa^{1/3}\right)^{1/6} = a^{1/6} \left(a^{4/3}\right)^{1/6} = a^{1/6} a^{2/9} = \sqrt[3]{a}.$$

$$2) b^{1/12} \sqrt[3]{b^4 \sqrt{b}} = b^{1/12} \sqrt[12]{b^4 b} = \sqrt[12]{b^4 b \cdot b} = \sqrt{b}.$$

$$3) \left(\sqrt[3]{ab^{-2}} + (ab)^{1/6}\right) \sqrt[6]{ab^4} = \left(a^{2/6} b^{-4/6} + a^{1/6} b^{-1/6}\right) a^{1/6} b^{4/6} = a^{3/6} b^0 + a^0 b^{3/6} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

$$81. 1) \text{ Указание: } \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a} + \frac{b}{a}}\right) = \left(\frac{b^{1/2}}{a^{1/2}} - 1\right)^2 = \frac{\left(a^{1/2} - b^{1/2}\right)^2}{a}.$$

$$2) \text{ Указание: } \left(2 - \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) = \frac{\left(a^{1/3} + b^{1/3}\right)^2}{a^{1/3}b^{1/3}}.$$

$$3) \frac{a^{1/4} - a^{3/4}}{a^{1/4} - a^{3/4}} - \frac{b^{-1/2} - b^{3/2}}{b^{1/2} + b^{-1/2}} = \frac{a^{1/4}(1 - a^2)}{a^{1/4}(1 - a)} - \frac{b^{-1/2}(1 - b^2)}{b^{-1/2}(b + 1)} = (1 + a) - (1 - b) = a + b.$$

$$4) \frac{\sqrt{a} - a^{-1/2}b}{1 - \sqrt{a^{-1}b}} - \frac{\sqrt[3]{a^2} - a^{-1/3}b}{\sqrt[3]{a} + a^{-1/3}\sqrt{b}} = \frac{a^{1/2} - a^{-1/2}b}{1 - a^{-1/2}b^{1/2}} - \frac{a^{2/3} - a^{-1/3}b}{a^{1/3} + a^{-1/3}b^{1/2}} = \frac{a^{-1/2}(a - b)}{a^{-1/2}(a^{1/2} - b^{1/2})} - \frac{a^{-1/3}(a - b)}{a^{-1/3}(a^{1/2} + b^{1/2})} = \left(a^{1/2} + b^{1/2}\right) - \left(a^{1/2} - b^{1/2}\right) = 2\sqrt{b}$$

$$82. 1) \text{ Указание: сократите дробь на } (nm)^{\sqrt{3}}.$$

$$2) \text{ Указание: сократите дробь на } (xy)^{\sqrt{7}}.$$

3), 4) Указание: воспользуйтесь формулой разности квадратов.

$$83. 1) (a^{1+\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}} = a^{(1+\sqrt{2})(-\sqrt{2})} = a^{1-2} = 1/a.$$

$$2) \text{ Указание: } \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(1-\sqrt{5})^2}{-4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

$$3) (a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}})^{\sqrt{4}-\sqrt{6}+\sqrt{9}}. \text{ Решение: по формуле суммы кубов получаем:}$$

$$(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}) = (\sqrt[3]{2})^3 + (\sqrt[3]{3})^3 = 5, \text{ значит } (a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}})^{\sqrt{4}-\sqrt{6}+\sqrt{9}} = a^5.$$

$$4) \text{ Указание: воспользуйтесь формулой разности кубов.}$$

$$84. 1) 5^{2x} = 5^4. \text{ Решение: } 2x = 4, x = 2. \text{ Ответ: } x = 2.$$

$$2) \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}. \text{ Решение: } 2x = -1, x = -\frac{1}{2}. \text{ Ответ: } x = -\frac{1}{2}.$$

$$3) 9^x = 3^{2\sqrt{2}}. \text{ Решение: } 9^x = 3^{2x}, \text{ т.е. } 2x = 2\sqrt{2}; x = \sqrt{2}. \text{ Ответ: } x = \sqrt{2}.$$

$$4) 16^x = 2^{8\pi}. \text{ Решение: } 16^x = 2^{4x}, \text{ т.е. } 2^{4x} = 2^{8\pi}; 4x = 8\pi; x = 2\pi.$$

$$85. 1) 7^{x\sqrt{3}} = \sqrt{7}. \text{ Решение: } \sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}, \text{ т.е. } x\sqrt{3} = \frac{1}{2}; x = \frac{1}{2\sqrt{3}}. \text{ Ответ: } x = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

$$2) 25^{x\sqrt{2}} = 5\sqrt{5}. \text{ Решение: } 5^{2x\sqrt{2}} = 5^{\frac{3}{2}}, \text{ т.е. } 2x\sqrt{2} = \frac{3}{2}; x = \frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

$$3) (\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2}. \text{ Решение: } (\sqrt{2})^x = 2^{x/2}, 2\sqrt{2} = 2^{3/2}, \text{ т.е. } 2^{x/2} = 2^{3/2}, x = 3.$$

$$4) (\sqrt{3})^{3x} = 3\sqrt{3}. \text{ Решение: } 3^{\frac{3}{2}x} = 3^{\frac{3}{2}}, \text{ т.е. } \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}, x = 1. \text{ Ответ: } x = 1.$$

$$86. 1) \text{ Указание: возведите оба числа в 15-ю степень.}$$

$$2) \text{ Указание: возведите оба числа в 12-ю степень.}$$

$$3) \text{ Указание: возведите оба числа в 6-ю степень.}$$

$$4) \text{ Указание: возведите оба числа в 20-ю степень.}$$

$$87. 1), 2), 3) \text{ аналогично 4).}$$

$$4) \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{a-b}{a^{2/3} + \sqrt[3]{ab} + b^{2/3}} = \frac{a^{2/3} - b^{2/3}}{a^{1/3} - b^{1/3}} - \frac{a-b}{a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}} =$$

$$= \frac{(a^{1/3} - b^{1/3})(a^{1/3} + b^{1/3})}{a^{1/3} - b^{1/3}} - \frac{(a^{1/3} - b^{1/3})(a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3})}{a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}} =$$

$$= (a^{1/3} + b^{1/3}) - (a^{1/3} - b^{1/3}) = 2b^{1/3} = 2\sqrt[3]{b}.$$

$$88. 1), 2) \text{ Указание: воспользуйтесь формулами суммы и разности кубов.}$$

$$3) \frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a-b} \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} = \frac{(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) - (a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})}{a-b} = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a-b} = \frac{\sqrt[3]{ab}}{b-a}$$

4) Указание: воспользуйтесь формулой суммы кубов, см. п.3).

89. 1) Указание: воспользуйтесь формулами суммы и разности кубов и формулой разности квадратов.

2) Указание: воспользуйтесь формулами суммы и разности кубов в знаменателе.

$$3) \left(\frac{3x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}}}{x+1} + \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} + 1} \right) : \left(4x^{\frac{1}{3}} + 4 + \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \right) = \\ = \frac{(3x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}}) + (x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1)}{x+1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{4x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}} + 1} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x+1} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1}$$

90. Искомая сумма вычисляется по формуле сложных процентов (см. задачу

$$5 \S 5): S = a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^t = 5000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100} \right)^3 = 5306,04. \text{ Ответ: } 5306 \text{ руб. } 04 \text{ коп.}$$

91. Искомая сумма вычисляется по формуле сложных процентов (см. задачу

$$5 \S 5): S = a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^t = 200 \cdot \left(1 + \frac{3}{100} \right)^{27} = 2158,7. \text{ Ответ: } 2158 \text{ руб. } 70 \text{ коп.}$$

Упражнения к главе I

$$92. 1) \left(0,645 : 0,3 - 1 \frac{107}{180} \right) \left(4 : 6,25 - 1 : 5 + \frac{1}{7} \cdot 1,96 \right) = \left(\frac{0,645 \cdot 10}{3} - \frac{287}{180} \right) \left(\frac{400}{625} - \frac{1}{5} + \frac{196}{700} \right) = \\ = \left(\frac{2,15 \cdot 180 - 287}{180} \right) (0,64 - 0,2 + 0,28) = \frac{387 - 287}{180} \cdot 1,12 = \frac{28}{45}.$$

$$2) \left(\frac{1}{2} - 0,375 \right) : 0,125 + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12} \right) : (0,358 - 0,108) = 0,125 : 0,125 + \frac{3}{12} : 0,25 = \\ = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{100}{25} = 1 + 1 = 2.$$

93. См. задачу 2 §1 или задачу 4 §3.

96. 1), 2) аналогично 3).

$$3) 27^{\frac{2}{3}} + 9^{-1} = (3^3)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{9} = 9 \frac{1}{9}.$$

4), 5) аналогично 6).

$$6) \left(2 \frac{10}{27} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \left(\frac{64}{27} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \left(\frac{3^3}{4^3} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \left(\frac{3}{4} \right)^4 = \frac{81}{256}.$$

$$97. 1) \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{2\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 9}{2 \cdot 4}} = \frac{3}{2}. \quad 2) \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{6\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 27}{4 \cdot 4}} = \frac{3}{2}.$$

$$3) \sqrt[4]{15\frac{5}{8}} : \sqrt[4]{\frac{2}{5}} = \sqrt[4]{\frac{25 \cdot 5}{8} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{5}{2}. \quad 4) \sqrt[3]{11\frac{1}{4}} : \sqrt[3]{3\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{45}{4} \cdot \frac{3}{10}} = \frac{3}{2}.$$

$$5) \left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2 = \left(\sqrt{\sqrt[3]{27}}\right)^2 = \sqrt[3]{27} = 3. \quad 6) \left(\sqrt{\sqrt[3]{16}}\right)^3 = \sqrt{16} = 4.$$

98. 1) Указание: $2^{-1} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} > 1$.

2) Указание: $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} > 2$, $32^{\frac{1}{5}} = 2$.

99. 1) Указание: $\frac{6}{11} < 0,88 < 1$.

2) Указание: $0,41 < \frac{5}{12} < 1$.

3) Указание: $1 < 4,09 < 4\frac{3}{25}$.

4) Указание: $\frac{11}{12} < \frac{12}{13} < 1$.

100. 1) $\frac{a^{\frac{1}{2}} a^{-0,5}}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{2} - 0,5 - \frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$.

2) $\frac{a^{-3} a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{-3 + \frac{7}{3} - \frac{1}{3}} = a^{-1}$.

3) $(a^{2,5})^2 \sqrt[3]{a} = a^{2,5 \cdot 2 + \frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{3}}$.

4) $\sqrt[7]{a^2} \left(a^{\frac{3}{14}}\right)^2 = a^{\frac{2}{7} + \frac{6}{14}} = a^{\frac{5}{7}}$.

101. Аналогично задаче 69.

102. 1) Указание: сравните $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{7}}$ и $\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{2}{7}}$.

2) Указание: сравните $\left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{3}{5}}$ и $\left(\frac{1}{42}\right)^{\frac{3}{5}}$.

103. 1) $6^{2x} = 6^{\frac{1}{5}}$. Решение: $2x = \frac{1}{5}$; $x = 0,1$. Ответ: $x = 0,1$.

2) $3^x = 27$. Решение: $27 = 3^3$, т.е. $3^x = 3^3$; $x = 3$. Ответ: $x = 3$.

3) $7^{3x} = 7^{10}$. Решение: $3x = 10$; $x = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$. Ответ: $x = 3\frac{1}{3}$.

4) $2^{2x+1} = 32$. Решение: $32 = 2^5$, т.е. $2^{2x+1} = 2^5$; $2x+1 = 5$. Ответ: $x = 2$.

5) $4^{2+x} = 1$. Решение: $1 = 4^0$, т.е. $4^{2+x} = 4^0$; $2+x = 0$, $x = -2$. Ответ: $x = -2$.

104. 1) $\frac{y - 16y^{\frac{1}{2}}}{5y^{\frac{1}{4}} + 20} = \frac{y^{\frac{1}{2}}(y^{\frac{1}{2}} - 16)}{5(y^{\frac{1}{4}} + 4)} = \frac{y^{\frac{1}{2}}(y^{\frac{1}{4}} - 4)(y^{\frac{1}{4}} + 4)}{5(y^{\frac{1}{4}} + 4)} = \frac{y^{\frac{1}{2}}(y^{\frac{1}{4}} - 4)}{5}$.

2) Указание: воспользуйтесь формулой разности квадратов в числителе.

105. Упростить:

$$1) \frac{ab^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{b^{\frac{1}{2}}(ab - 1)}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - 1} = b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + 1) = b\sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

2) Указание: воспользуйтесь формулой разности квадратов в знаменателе первой дроби.

106. 1) Указание: $S_2 = b_1 + b_2$, откуда $b_1 = 243$.

2) Указание: $S_2 = b_1 + b_2$, откуда $b_1 = 34$.

3) Указание: $b_1 + b_2 = b_1(1+q)$; $b_1 - b_3 = b_1(1-q^2)$, поделите одно равенство на другое, получится $1-q = \frac{12}{13}$, откуда $q = \frac{1}{13}$.

4) Указание: $b_2 + b_4 = b_1(1+q^2)$; $b_2 - b_4 = b_1(1-q^2)$, поделите одно равенство на другое, получится $\frac{1-q^2}{1+q^2} = \frac{15}{17}$, откуда $q^2 = \frac{1}{16}$, $q = \pm \frac{1}{4}$.

107. 1) Указание: $a = 1,10(209)$, тогда $100a = 110, (209)$ и

$$100000a = 110209, (209), \text{ откуда } 99900a = 110099.$$

2) Аналогично 1).

108. Найдите сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии с положительными членами, если сумма первых трех ее членов равна 39, а сумма их обратных величин равна $\frac{13}{27}$.

$$\text{По условию: } \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 39 \\ \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} = \frac{13}{27}, \text{ т.е.} \end{cases} \begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 39 \\ \frac{1}{b_1} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} \right) = \frac{13}{27} \end{cases}$$

Поделим первое равенство на второе, получим:

$$b_1^2 \cdot \frac{1+q+q^2}{1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}} = 81; \quad b_1^2 \cdot q^2 = 81, \text{ откуда } b_1q = 9 \quad (b_1q = b_2 > 0). \text{ Под-}$$

ставим $q = \frac{9}{b_1}$ в первое уравнение, получим $b_1 \cdot \left(1 + \frac{9}{b_1} + \frac{81}{b_1^2} \right) = 39$, откуда

$$b_1 = 15 \pm 12. \text{ Если } b_1 = 27, \text{ то } q = \frac{1}{3} \text{ и } S = \frac{27}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{81}{2} = 40,5. \text{ Если}$$

$b_1 = 3$, то $q = 3 > 1$ (не удовлетворяет условию). Ответ: $S = 40,5$.

109. Указание: $43 \pm 30\sqrt{2} = (5 \pm 3\sqrt{2})^2$.

110. Указание: $34 - 24\sqrt{2} = (4 - 3\sqrt{2})^2$.

111. Сравнить числа a и b , если:

1) $a = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{5}{3+2\sqrt{2}}$, $b = \frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$. Решение:

$$a = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{5}{3+2\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} + \frac{5(3-2\sqrt{2})}{9-8} = \sqrt{5} + \sqrt{3} + 15 - 10\sqrt{2},$$

$$b = \frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{8}+\sqrt{5})}{8-5} = \frac{2\sqrt{8}+2\sqrt{5}}{3}.$$

Т.е. необходимо сравнить числа $\sqrt{5} + \sqrt{3} + 15 - 10\sqrt{2}$ и $\frac{2\sqrt{8}+2\sqrt{5}}{3}$.

Домножим оба числа на 3 и сравним: $3\sqrt{5} + 3\sqrt{3} + 45 - 30\sqrt{2}$ и $2\sqrt{8} + 2\sqrt{5}$;

т.е. необходимо сравнить $45 + \sqrt{5} + 3\sqrt{3}$ и $34\sqrt{2}$. Но $45 + \sqrt{5} + 3\sqrt{3} > 45 + 2 + \sqrt{27} > 47 + \sqrt{25} = 52$, а $34\sqrt{2} < 34 \cdot 1,8 = 51,2$, т.е. $a > b$.

2) $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{10}$. Решение: возведем оба числа в квадрат, получим $a^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $b^2 = 10$. Т.е. необходимо сравнить $2\sqrt{6}$ и 5.

$2\sqrt{6} = \sqrt{24} < \sqrt{25} = 5$, следовательно $a^2 < b^2$, т.к. $a > 1$ и $b > 1$ (очевидно), то из того, что $a^2 < b^2$ следует $a < b$. Ответ: $a < b$.

3) $a = 5 - \sqrt{15}$, $b = \sqrt{17} - 3$. Решение: сравним числа $5 + 3$ и $\sqrt{17} + \sqrt{15}$.

Возведем оба числа в квадрат (см. п.2) и сравним числа 32 и $2\sqrt{17 \cdot 15}$.

$\sqrt{16^2} > \sqrt{17 \cdot 15}$, поэтому $32 = 2\sqrt{16^2} > 2\sqrt{17 \cdot 15}$, т.е. $a > b$. Ответ: $a > b$.

4) $a = \sqrt{13} - \sqrt{12}$, $b = \sqrt{12} - \sqrt{11}$. Решение:

$$a = \sqrt{13} - \sqrt{12} = \frac{(\sqrt{13} - \sqrt{12})(\sqrt{13} + \sqrt{12})}{\sqrt{13} + \sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{12}}, \text{ аналогично } b = \frac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{11}},$$

но $\sqrt{13} + \sqrt{12} > \sqrt{12} + \sqrt{11}$, следовательно $\frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{12}} < \frac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{11}}$, т.е.

$a < b$. Ответ: $a < b$.

112. 1) $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3} = -2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

$$2) \frac{\sqrt{5}}{5+\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}(5-\sqrt{10})}{(5+\sqrt{10})(5-\sqrt{10})} = \frac{5\sqrt{5}-\sqrt{50}}{25-10} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}.$$

3) Указание: домножьте числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$.

4) Указание: домножьте числитель и знаменатель на $\sqrt{3}$.

5) Указание: домножьте числитель и знаменатель на $(\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ и дважды воспользуйтесь формулой разности квадратов.

6) Указание: домножьте числитель и знаменатель на $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$ и воспользуйтесь формулой суммы кубов.

$$7) \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{((1+\sqrt{2})+\sqrt{3})((1+\sqrt{2})-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2+3} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

8) Указание: домножьте числитель и знаменатель на $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$ и воспользуйтесь формулой разности кубов.

113. Указание: воспользуйтесь формулами разности и суммы кубов.

$$114. 1) \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{y}} - \frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt{x}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}} = \sqrt[4]{y}.$$

2) Указание: воспользуйтесь формулами суммы и разности кубов.

$$3) \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}} + \sqrt[3]{y} = \frac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y})}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[4]{x}.$$

4) Указание: $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)$.

115. 1), 2), 4) аналогично 3).

$$3) \frac{a^{2/3} - b^{2/3}}{a^{1/3} + b^{1/3}} \cdot \frac{a^{2/3} + \sqrt[3]{ab} + b^{2/3}}{a - b} =$$

$$= \frac{(a^{1/3} - b^{1/3})(a^{1/3} + b^{1/3})}{a^{1/3} + b^{1/3}} \cdot \frac{a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}{(a^{1/3} - b^{1/3})(a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3})} = 1.$$

116. 1) Указание: $a^2 - 4 + 3a^{-2} = (a - a^{-1})(a - 3a^{-1})$.

$$\begin{aligned}
 2) & \left(\frac{4}{(a+b)^{-2}} - \left(\frac{a-b}{a^3+b^3} \right)^{-1} \right) \cdot (ab)^{-1} = \left((a+b)^2 - \frac{a^3+b^3}{a-b} \right) \cdot \frac{1}{ab} = \\
 & = \frac{(a+b)^2(a-b) - (a^3+b^3)}{(a-b)ab} = \frac{-2b^3 - ab^2 + a^2b}{(a-b)ab} = \frac{-2b^2 - ab + a^2}{(a-b)a} = \\
 & = \frac{-2b^2 - 2ab + ab + a^2}{(a-b)a} = \frac{(a-b)(a-2b)}{(a-b)a} = \frac{a-2b}{a} = 1 - 2\frac{b}{a}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 117. 1) & \left(\frac{(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^2 + (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})^2}{a + \sqrt{ab}} \right)^5 \sqrt[3]{a^{10}\sqrt{a}} = \\
 & = \left(\frac{a^{1/2} + 2a^{1/4}b^{1/4} + b^{1/2} + a^{1/2} - 2a^{1/4}b^{1/4} + b^{1/2}}{a^{1/2}(a^{1/2} + b^{1/2})} \right)^5 \left(a^{21/2} \right)^{1/3} = \left(\frac{2}{a^{1/2}} \right)^5 \cdot a^{7/2} = 32a.
 \end{aligned}$$

2) Указание: приведите к общему знаменателю.

$$\begin{aligned}
 3) & \left(\frac{a^{3/2} - b^{3/2}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \sqrt{\frac{ab^3\sqrt{a} + ab^{3/2}}{a^{1/3} + b^{1/3}}} \right) \cdot \frac{1}{a+b} = \\
 & = \left(\frac{(a^{1/2} - b^{1/2})(a + a^{1/2}b^{1/2} + b)}{a^{1/2} - b^{1/2}} - \sqrt{\frac{ab(a^{1/3} + b^{1/3})}{a^{1/3} + b^{1/3}}} \right) \cdot \frac{1}{a+b} = \\
 & = \left(a + a^{1/2}b^{1/2} + b - \sqrt{ab} \right) \cdot \frac{1}{a+b} = 1.
 \end{aligned}$$

118. Доказать, что $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 2$.

Т.к. $7 \pm 5\sqrt{2} = (1 \pm \sqrt{2})^3$, то $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 2$, ч.т.д.

Глава II

Степенная функция

§6. Степенная функция, ее свойства и график

119. 1) $y = x^6$. Определена при $x \in \mathbf{R}$, $y \geq 0$.

2) $y = x^5$. Определена при $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$.

3) $y = x^{\frac{1}{2}}$. Определена при $x \geq 0$, $y \geq 0$.

4) $y = x^{-2}$. Определена при $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $y > 0$.

5) $y = x^{-3}$. Определена при $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

6) $y = x^{\frac{1}{3}}$. Определена при $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$.

120. Указание: при $p > 0$ функция является возрастающей, при $p < 0$ – убывающей.

121. 1) См. рис. 2;

2) См. рис. 2.

3) См. рис. 3.

4) См. рис. 3.

122. 1) $4, 1^{2,7} > 4, 1^1 > 1^1$;

2) $0, 2^{0,3} < 0, 2^1 < 1^1$;

3) $0, 7^{9,1} < 1^{9,1} = 1$;

4) $(\sqrt{3})^{0,2} = 3^{0,1} > 3^0 = 1$.

123. Указание: см. рис. 4.

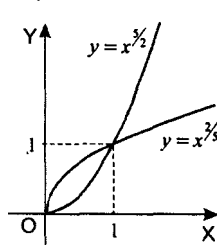


Рис. 2

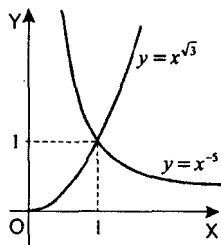


Рис. 3

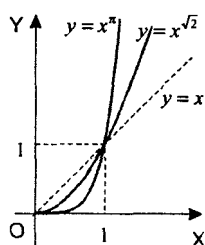


Рис. 4

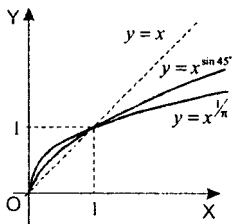


Рис. 5

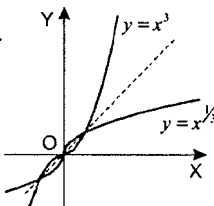


Рис. 6

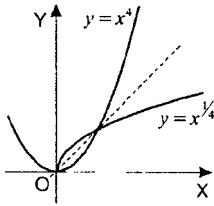


Рис. 7

124. Указание: см. рис. 5.

125. 1) $3,1^{7,2}$ и $4,3^{7,2}$. Решение: т.к. $3,1 < 4,3$, то $3,1^{7,2} < 4,3^{7,2}$.

2) $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3}$ и $\left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$. Решение: т.к. $\frac{10}{11} < \frac{12}{11}$, то $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3} < \left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$.

3) $0,3^{0,3}$ и $0,2^{0,3}$. Решение: т.к. $0,3 > 0,2$, и $0,3 > 0$, то $0,3^{0,3} > 0,2^{0,3}$.

4) $2,5^{-3,1}$ и $2,6^{-3,1}$. Решение: т.к. $2,5 < 2,6$ и $-3,1 < 0$, то $2,5^{-3,1} > 2,6^{-3,1}$.

5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$. Решение: т.к. $\frac{7}{9} < \frac{8}{10}$ и $-2 < 0$, то $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2} > \left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$.

6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{\frac{3}{4}}$ и $\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$. Решение: т.к. $\frac{14}{15} < \frac{15}{16}$ и $\frac{3}{4} > 0$, то $\left(\frac{14}{15}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$.

7) $(4\sqrt{3})^{\frac{2}{5}}$ и $(3\sqrt{4})^{\frac{2}{5}}$. Решение: т.к. $4\sqrt{3} > 3\sqrt{4}$; $\frac{2}{5} > 0$, то $(4\sqrt{3})^{\frac{2}{5}} > (3\sqrt{4})^{\frac{2}{5}}$.

8) $(2\sqrt[3]{6})^{0,2}$ и $(6\sqrt[3]{2})^{0,2}$. Решение: т.к. $2\sqrt[3]{6} < 6\sqrt[3]{2}$ и $-0,2 < 0$, то $(2\sqrt[3]{6})^{0,2} > (6\sqrt[3]{2})^{0,2}$.

126. 1) $y = x^3$ ($x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$); $y = x^{\frac{1}{3}}$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$). См. рис. 6.

2) $y = x^4$ ($x \in \mathbf{R}$, $y \geq 0$); $y = x^{\frac{1}{4}}$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$). См. рис. 7.

3), 4) аналогично 1), 2).

127. Указание: $1 - \pi < 1 - \sqrt{2} < 0$.

128. 1) $y = x^\pi + 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 1$). Указание: сдвиньте график функции $y = x^\pi$ на одну единицу вверх.

2) $y = x^{\frac{1}{\pi}} - 1$ ($x \geq 0$, $y \geq -1$). Указание: сдвиньте график функции $y = x^{\frac{1}{\pi}}$ на одну единицу вниз.

3) $y = (x-2)^x$ ($x \geq 2$, $y \geq 0$). Указание:

сдвиньте график функции $y = x^x$ на две единицы вправо.

4) $y = (x+1)^{-\sqrt{2}}$ ($x > -1$, $y > 0$). Указание:

сдвиньте график функции $y = x^{-\sqrt{2}}$ на одну единицу влево.

5) $y = (x-2)^{-2}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $y > 0$). Указание:

сдвиньте график функции $y = x^{-2}$ на две единицы вправо.

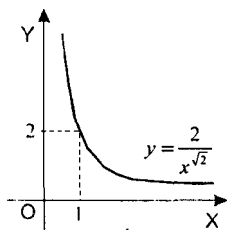


Рис. 8

6) $y = \frac{2}{x^{\sqrt{2}}}$ ($x > 0$, $y > 0$). См. рис. 8.

129. 1) См. рис. 9;

2) См. рис. 10.

3) См. рис. 11.

4) См. рис. 12.

5) См. рис. 13.

6) См. рис. 14.

130. Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = \sqrt[5]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{5}}$. Решение: первая функция определена при $x \in \mathbb{R}$, а вторая только при $x \geq 0$, таким образом пересечения могут быть только при $x \geq 0$. Решим уравнение $x^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{5}}$. Возведя в 5-ую степень, получим $x = x^3$, $x^3 - x = 0$, $x(x-1)(x+1) = 0$, т.е. $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ (посторонний корень). Точки пересечения (0; 0) и (1; 1). Ответ: (0; 0), (1; 1).

2) Аналогично 1).

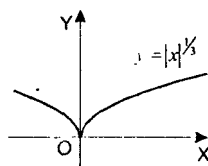


Рис. 9

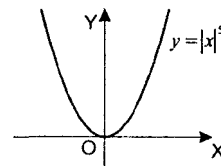


Рис. 10

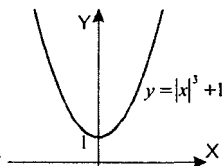


Рис. 11

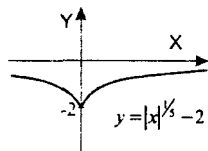


Рис. 12

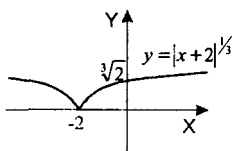


Рис. 13

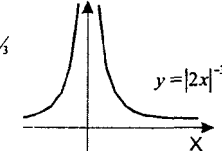


Рис. 14

§7. Взаимно обратные функции

Теорема 1

Функция обратима тогда и только тогда, когда она принимает каждое свое значение ровно один раз.

Теорема 2

Монотонная функция является обратимой.

Теорема 3

Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$.

131. 1), 3), 4), 6) обратимы по теореме 1.

2) и 5) не обратимы по теореме 1.

132. 1) $y = 2x - 1$. Решение: выразим x через y , получим: $x = \frac{y+1}{2}$, т.е.

$y = \frac{x+1}{2}$ – функция, обратная к данной.

2) $y = -5x + 4$. Решение: выразим x через y , получим: $x = \frac{4-y}{5}$, т.е.

$y = \frac{4-x}{5}$ – функция, обратная к данной.

3) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$. Решение: выразим x через y , получим: $x = 3y + 2$, т.е.

$y = 3x + 2$ – функция, обратная к данной.

4) $y = \frac{3x-1}{2}$. Решение: выразим x через y , получим: $x = \frac{2y+1}{3}$, т.е.

$y = \frac{2x+1}{3}$ – функция, обратная к данной.

5) $y = x^3 + 1$. Решение: выразим x через y , получим: $x^3 = y - 1$, $x = \sqrt[3]{y-1}$,

т.е. $y = \sqrt[3]{x-1}$ – функция, обратная к данной.

6) $y = x^3 - 3$. Решение: выразим x через y , получим: $x = \sqrt[3]{y+3}$, т.е.

$y = \sqrt[3]{x+3}$ – функция, обратная к данной.

133. Указание: область определения обратной функции совпадает с областью значений данной, а область значений обратной функции совпадает с областью определения данной.

134. 1) См. рис. 15.

2) См. рис. 16.

3) Аналогично 1).

4) См. рис. 17.

135. 1) $y = -x^3$ и $y = -\sqrt[3]{x}$. Решение: область определения и область значе-

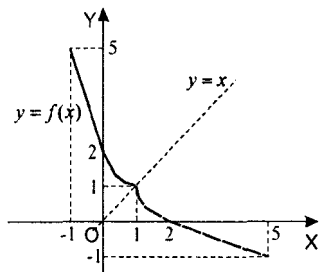


Рис. 15

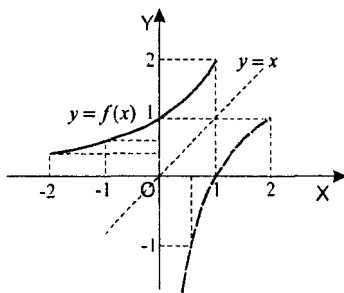


Рис. 16

ний обеих функций равна \mathbf{R} . $y = -x^3 \Rightarrow x^3 = -y \Rightarrow x = \sqrt[3]{-y} = -\sqrt[3]{y}$, т.е. функция $y = -\sqrt[3]{x}$ является обратной к функции $y = -x^3$. Ответ: Да.

2) $y = -x^5$ и $y = \sqrt[5]{x}$. Решение: по теореме 3, если точка $(1; -1)$ принадлежит графику функции $y = -x^5$, то точка $(-1; 1)$ должна принадлежать графику функции $y = \sqrt[5]{x}$, а это не так. Ответ: Нет.

3) $y = x^{-3}$ и $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Решение: области определения и области значений

обеих функций – множество $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. $y = x^{-3} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{y}}$, т.е. функ-

ция $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ является обратной к функции $y = x^{-3}$. Ответ: Да.

4) $y = \sqrt[5]{x^3}$ и $y = x\sqrt[5]{x^2}$. Решение:

$$y = \sqrt[5]{x^3} \Leftrightarrow x^3 = y^5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y^5} = y\sqrt[3]{y^2}, \text{ т.е. функция}$$

функция $y = x\sqrt[3]{x^2}$ является обратной

к функции $y = \sqrt[5]{x^3}$.

136. 1) $y = -x^{1/2}$. Решение: функция определена при $x \geq 0$,

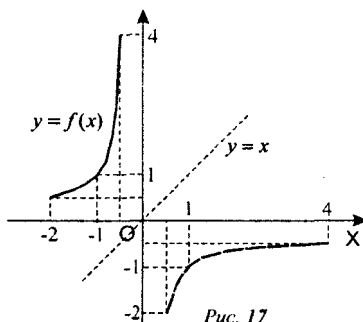


Рис. 17

при этом $y \leq 0$. $x^{\frac{1}{2}} = -y$; $x = (-y)^2$, то есть $y = (-x)^{\frac{1}{2}}$ при $x \leq 0$ является обратной функцией. Ответ: $y = x^2$, $x \leq 0$.

2) $y = -x^{\frac{3}{5}}$. Решение: область определения и множество значений функции – все множество \mathbf{R} . $y = -x^{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow x = -y^{\frac{5}{3}}$, т.е. функция $y = -x^{\frac{3}{5}}$ является обратной к данной. Ответ: $y = -x^{\frac{5}{3}}$.

3) $y = x^{\frac{3}{2}}$. Решение: область определения и множество значений функции: $y \geq 0$, $x \geq 0$. $y = x^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = y^{\frac{2}{3}}$, т.е. функция $y = x^{\frac{3}{2}}$ является обратной к данной при $x \geq 0$. Ответ: $y = x^{\frac{2}{3}}$, $x \geq 0$.

4) $y = -x^{\frac{1}{3}}$. Решение: область определения и множество значений функции – все множество \mathbf{R} . $y = -x^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = -y^3$, т.е. функция $y = -x^{\frac{1}{3}}$ является обратной к данной.

137. 4) См. рис. 18; 5) См. рис. 19.

6) См. рис. 20; 7) См. рис. 21.

8) См. рис. 22.

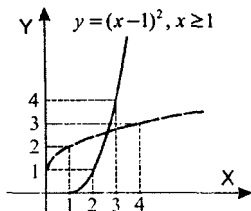


Рис. 18

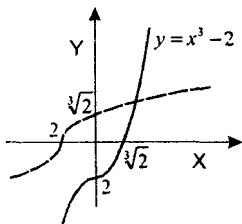


Рис. 19

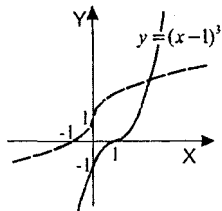


Рис. 20

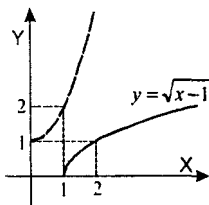


Рис. 21

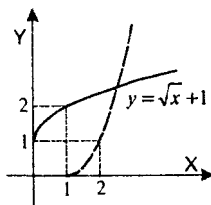


Рис. 22

§8. Равносильные уравнения и неравенства

О п р е д е л е н и е

Уравнения (неравенства), имеющие одинаковое множество корней (решений), называются *равносильными*.

138. 1) $(x+7) \cdot 3 = 2x+14$. Решение: $3x+21 = 2x+14$; $x = -7$. Ответ: $x = -7$.

2) $x^2 + \frac{1}{x^2-4} = 4 + \frac{1}{x^2-4}$. Решение О.О.У. – $x \neq \pm 2$. Домножим обе части

уравнения на $x^2 - 4$, получим: $x^2(x^2 - 4) + 1 = 4(x^2 - 4) + 1$; $x^2 = 4$, $x = \pm 2$ – не удовлетворяют О.О.У. Ответ: решений нет.

3) $\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{1-2x}{x^2-1}$. Решение: О.О.У. – $x \neq \pm 1$. Домножим обе части уравне-

ния на $x^2 - 1$, получим $x - 2 = 1 - 2x$; $3x = 3$, $x = 1$ (не удовлетворяет О.О.У.). Ответ: решений нет.

4) $\frac{5x-15}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x+2}$. Решение: О.О.У. – $x \neq 3$, $x \neq -2$. Домножим обе

части уравнения на $(x-3)(x+2)$, получим: $5x-15 = 2(x-3)$; $3x = 9$, $x = 3$ (не удовлетворяет условию $x \neq 3$). Ответ: решений нет.

139. 1) $3x-7 = 5x+5$ и $2x+12 = 0$. Решение: уравнения равносильны, т.к. оба имеют один корень $x = -6$.

2) $\frac{1}{5}(2x-1) = 1$ и $\frac{3x-1}{8} = 1$. Решение: уравнения равносильны, т.к. оба имеют один корень $x = 3$.

3) $x^2 - 3x + 2$ и $x^2 + 3x + 2$. Решение: корни первого уравнения 1 и 2, а корни второго уравнения –1 и –2, т.е. уравнения не равносильны. Ответ: нет.

4) Указание: $x = 5$ не является корнем второго уравнения.

5) Указание: $x = -1$ не является корнем второго уравнения.

6) Указание: оба уравнения не имеют корней.

140. 1), 2) Равносильны.

3) Указание: первое неравенство равносильно неравенству $(x-5)(x+1) < 0$.

4) Указание: подставьте в неравенства $x = -2$.

141. 1) Указание: корни второго уравнения $x = 3$ и $x = 2$, следовательно второе уравнение является следствием первого.

2) Указание: корни второго уравнения $x = 1$ и $x = 2$.

142. 1) $\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x-1} = \frac{4x}{x^2-1}$. Решение: О.О.У. – $x \neq \pm 1$. Домножим обе части

на $x^2 - 1 \neq 0$, тогда $x(x-1) + 2x(x+1) = 4x$, $3x^2 - 3x = 0$, $3x(x-1) = 0$, откуда $x = 0$ и $x = 1$ – посторонний корень. Ответ: $x = 0$.

2) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x-2}$. Решение: О.О.У – $x \neq 2$, $x \neq 0$. Домножим обе части на $(x-2) \cdot x$, получим: $(x-1)x - 2(x-2) = x$; $x^2 - 4x + 4 = 0$. Откуда $x = 2$, что не удовлетворяет условию $x \neq 2$. Ответ: решений нет.

3) Указание: $x = 5$ – корень, если $x \neq 5$, то можно сократить обе части на $x-5$.

4) Указание: сократите обе части на $x^2 + 1 \neq 0$ при всех x .

143. 1) $\frac{x+3}{2+x^2} < 3$. Решение: $\frac{x+3}{2+x^2} - 3 = \frac{x+3-6-3x^2}{2+x^2} = \frac{-3x^2+x-3}{2+x^2}$,

т.е. $\frac{3x^2-x+3}{2+x^2} > 0$. $3x^2-x+3 > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$ (т.к. $D < 0$), значит неравенство выполняется при всех x . Ответ: $x \in \mathbf{R}$.

2) $\frac{x-2}{5-x} > 1$. Решение: перепишем неравенство в виде: $\frac{x-2}{5-x} - 1 > 0$;

$\frac{x-2-5+x}{5-x} > 0$; $\frac{2x-7}{5-x} > 0$. Т.е. неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 2x-7 > 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} 2x-7 < 0 \\ 5-x < 0 \end{cases}. \text{ Из первой системы } 3,5 < x < 5, \text{ вторая система решений не имеет. Ответ: } 3,5 < x < 5.$$

144. 1) Указание: уравнение $|2x-1| = 3$ равносильно совокупности уравне-

ний: $\begin{cases} 2x-1 = 3 \\ 2x-1 = -3. \end{cases}$

2) Указание: домножьте обе части первого уравнения на 6.

145. 1)–4) Уравнения равносильны.

146. 1) Уравнения $|x| = \sqrt{5}$ и $\sqrt{x^2} = \sqrt{5}$ равносильны.

2) Указание: оба уравнения не имеют корней.

147. Указание: О.О.У – $x \neq \pm \frac{1}{3}$, домножьте обе части на $9x^2 - 1 \neq 0$, аналогично задаче 142 п.1).

148. 1) Указание: О.О.У – $x \neq \pm 1$, домножьте обе части на $x^2 - 1$, аналогично задаче 142 п.1).

2) Указание: $O.O.U - x \neq \pm 2$, домножьте обе части на $x^2 - 4$, аналогично задаче 142 п.1).

149. 1) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 > 2x^3 - x^2 + 4x - 2$. Решение:

$x^3 - 3x^2 + 2x - 6 - (2x^3 - x^2 + 4x - 2) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$, т.е. исходное неравенство равносильно неравенству $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 > 0$; $x^2(x+2) + 2(x+2) > 0$, $(x^2 + 2)(x+2) > 0$, т.к. $x^2 + 2 > 0$, то $x+2 > 0$, $x > -2$. Ответ: $x > -2$.

2) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 > -3x^3 + x^2 + 12x - 4$. Решение:

$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 - (-3x^3 + x^2 + 12x - 4) = 4x^3 - 4x^2 - 16x + 16 =$
 $= 4(x^2(x-1) - 4(x-1)) = 4(x^2 - 4)(x-1) = 4(x-2)(x+2)(x-1)$. Т.е. исходное неравенство равносильно неравенству $4(x-2)(x+2)(x-1) > 0$. Решая его, получаем $x > 2$ и $-2 < x < 1$. Ответ: $-2 < x < 1$, $x > 2$.

150. 1) $(x-3)^{x^2-x-2} = 1$. Решение: данное уравнение равносильно совокупности $x-3=1$ или $x^2-x-2=0$ и $x-3 \neq 0$. Из первого уравнения получаем $x=4$, из второго $x=-1$ и $x=2$. Ответ: $x=-1$, $x=2$, $x=4$.

2) $(x^2-x-1)^{x^2-1} = 1$. Решение: данное уравнение равносильно совокупности

$x^2-x-1=1$ или $\begin{cases} x^2-1=0 \\ x^2-x-1 \neq 0 \end{cases}$, откуда $x = \pm 1$ или $x = 2$.

Ответ: $x = \pm 1$, $x = 2$.

3) $(x+3)^{x^2-4} = (x+3)^{-3x}$. Решение: $x = -3$ – корень. При $x \neq -3$ разделим обе части уравнения на $(x+3)^{-3x}$, получим $(x+3)^{x^2+3x-4} = 1$. Откуда $x+3=1$ или $x^2+3x-4=0$ и $x+3 \neq 0$, т.е. $x = -2$, $x = 1$, $x = 4$.

Ответ: $x = -3$, $x = -2$, $x = 1$, $x = 4$.

4) Аналогично 3).

§9. Иррациональные уравнения

152. 1) $\sqrt{x+1} = 3$. Решение: возведем обе части в квадрат: $x+1=9$, $x=8$.

2) $\sqrt{x-2} = 5$. Решение: возведем обе части в квадрат: $x-2=25$, $x=27$.

3) $\sqrt{4+x} = \sqrt{2x-1}$. Решение: возведем обе части в квадрат: $4+x=2x-1$, $x=5$.

153. Указание: возведите обе части уравнения в куб.

154. 1) $x+1 = \sqrt{1-x}$. Решение: О.О.У – $x \leq 1$. Правая часть неотрицательна, поэтому $x+1 \geq 0$, т.е. $x \geq -1$. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим: $x^2 + 2x + 1 = 1 - x$; $x^2 + 3x = 0$, откуда $x = 0$ и $x = -3$ (не удовлетворяет условию $x \geq -1$). Ответ: $x = 0$.

2) $x = 1 + \sqrt{x+11}$. Решение: О.О.У – $x \geq 11$. Перепишем уравнение в виде $x-1 = \sqrt{x+11}$. Правая часть неотрицательна, поэтому $x-1 \geq 0$, т.е. $x \geq 1$. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим $x^2 - 2x + 1 = x + 11$; $x^2 - 3x - 10 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ – не удовлетворяет условию $x \geq 1$.

Ответ: $x = 5$.

3), 4) Указание: возведите обе части уравнения в квадрат.

155. 1) $\sqrt{x} - x = -12$. Решение: О.О.У – $x \geq 0$. Перепишем уравнение в виде: $\sqrt{x} = x - 12$. Т.к. левая часть уравнения не отрицательна, то $x \geq 12$. Возведем в квадрат: $x = x^2 - 24x + 144$; $x^2 - 25x + 144 = 0$. Отсюда $x = 16$ и $x = 9$ (не удовлетворяет условию $x \geq 12$). Ответ: $x = 16$.

2) Указание: перепишите уравнение в виде $\sqrt{x} = x - 2$, возведите в квадрат.

3) Аналогично 4).

4) $\sqrt{6+x-x^2} = 1-x$. Решение: О.О.У – $6+x-x^2 \geq 0$, т.е. $-2 \leq x \leq 3$. Т.к. левая часть неотрицательна, то $1-x \geq 0$, т.е. $x \leq 1$. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим $6+x-x^2 = 1-2x+x^2$, $2x^2 - 3x - 5 = 0$, откуда $x = -1$ и $x = \frac{5}{2}$ – не удовлетворяет условию $x \leq 1$. Ответ: $x = -1$.

156. 1) Аналогично 4).

2) Аналогично 3).

3) $\sqrt{15+x} + \sqrt{3+x} = 6$. Решение: О.О.У – $\begin{cases} 15+x \geq 0 \\ 3+x \geq 0 \end{cases}$, т.е. $x \geq -3$. Т.к. обе

части уравнения неотрицательны, возведем их в квадрат, получим:

$18+2x+2\sqrt{x^2+18x+45} = 36$; $\sqrt{x^2+18x+45} = 9-x$. Т.к. левая часть неотрицательна, то $x \leq 9$. Возведем еще раз обе части уравнения в квадрат, получим $x^2+18x+45 = 81-18x+x^2$, $36x = 36$, $x = 1$. Ответ: $x = 1$.

4) $\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 1$. Решение: О.О.У – $\begin{cases} 3-2x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$, т.е. $x \leq 1$. Перепишем уравнение в виде: $\sqrt{3-2x} = 1 + \sqrt{1-x}$, т.к. обе части уравнения неотрица-

тельны, возведем в квадрат, получим: $3-2x=2-x+2\sqrt{1-x}$,
 $1-x=2\sqrt{1-x}$. Левая часть неотрицательна, возведем в квадрат еще раз,
 получим: $(1-x)^2=4(1-x)$, откуда $x=1$ и $x=-3$. Ответ: $x=1$, $x=-3$.

157. 1) $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^3+x^2}=0$. Решение: $\sqrt{x^2+2}\geq 0$, $\sqrt{x^3+x^2}\geq 0$, следовательно равенство возможно только если $x^2+2=0$ и $x^3+x^2=0$. Но $x^2+2\geq 2$, следовательно решений нет. Ответ: решений нет.

2) Указание: возведите уравнение в куб.

158. 1) $\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}=2$. Решение: О.О.У $-5\leq x\leq 5$. Т.к. правая часть неотрицательна, то $\sqrt{5-x}\geq\sqrt{5+x}$, т.е. $5-x\geq 5+x$, $x\leq 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим $10-2\sqrt{25-x^2}=4$, $\sqrt{25-x^2}=3$, откуда $x=-4$ и $x=4$ (не удовлетворяет условию $x\leq 0$). Ответ: $x=-4$.

2) $\sqrt{12+x}-\sqrt{1-x}=1$. Решение: О.О.У $-12\leq x\leq 1$. Т.к. правая часть неотрицательна, то $\sqrt{12+x}\geq\sqrt{1-x}$, т.е. $12+x\geq 1-x$, $x\geq -5,5$. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим $12+2x-2\sqrt{(12+x)(1-x)}=0$;
 $\sqrt{12-11x-x^2}=6$, откуда $x^2+11x+24=0$, $x=-3$ и $x=-8$ (не удовлетворяет условию $x\geq -5,5$). Ответ: $x=-3$.

3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=0$. Решение: т.к. значение квадратного корня неотрицательно, то равенство верно только при $x-2=x+6=0$, что неверно.
 Ответ: решений нет.

4) Аналогично 1), 2).

159. 1) $\sqrt{1-2x}-\sqrt{13+x}=\sqrt{x+4}$. Решение: О.О.У $-4\leq x\leq \frac{1}{2}$. Перепишем уравнение в виде: $\sqrt{1-2x}=\sqrt{13+x}+\sqrt{x+4}$. Обе части неотрицательны, возведем в квадрат: $1-2x=2x+17+2\sqrt{x^2+17x+52}$; $-8-2x=\sqrt{x^2+17x+52}$. При $x\leq -4$ (т.е. $-8-2x\geq 0$) возведем обе части уравнения в квадрат, получим: $64+32x+4x^2=x^2+17x+52$; $3x^2+15x+12=0$; $x^2+5x+4=0$. Т.е. $x=-1$ (посторонний корень) и $x=-4$. Ответ: $x=-4$.

2) Аналогично 1).

160. 1), 2) Указание: возведите обе части уравнения в куб.

3) Указание: при $x\geq 0$ возведите обе части уравнения в квадрат.

4) Указание: возведите обе части уравнения в квадрат.

161. 1) $\sqrt[3]{x^3-2}=x-2$. Решение: О.О.У $x\in\mathbf{R}$. Возведем уравнение в куб, получим $x^3-2=x^3-6x^2+12x-8$; $6x^2-12x+6=0$, $6(x-1)^2=0$, $x=1$.
 Ответ: $x=1$.

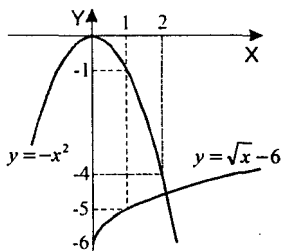


Рис. 23

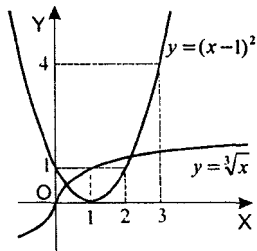


Рис. 24

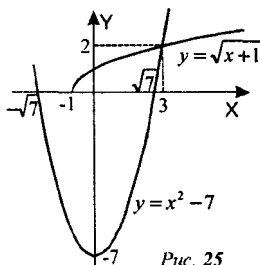


Рис. 25

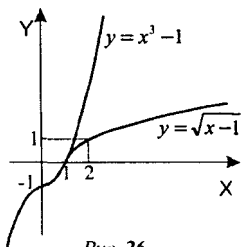


Рис. 26

2) $\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 16x - 5} = x - 2$. Решение: возведем уравнение в куб, получим: $x^3 - 5x^2 + 16x - 5 = x^3 - 8 - 6x^2 + 12x$; $x^2 + 4x + 3 = 0$, отсюда $x = -1$ и $x = -3$. Ответ: $x = -1$, $x = -3$.

162. 1) Один корень (см. рис. 23); 2) Два корня (см. рис. 24);
3) Один корень (см. рис. 25); 4) Один корень (см. рис. 26).

163. 1) $\sqrt{4x + 2\sqrt{3x^2 + 4}} = x + 2$. Решение: при $x \geq -2$ возведем в квадрат, получим: $2\sqrt{3x^2 + 4} = x^2 + 4$. Возведем в квадрат еще раз: $4(3x^2 + 4) = (x^2 + 4)^2$; $x^4 - 4x^2 = 0$, отсюда $x = 0$ и $x = \pm 2$. Ответ: $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$.

2) $3 - x = \sqrt{9 - \sqrt{36x^2 - 5x^4}}$. Решение: при $x \leq 3$ возведем обе части уравнения в квадрат: $9 - 6x + x^2 = 9 - \sqrt{36x^2 - 5x^4}$; $\sqrt{36x^2 - 5x^4} = 6x - x^2$. $6x - x^2 \geq 0$ при $0 \leq x \leq 6$, с учетом условия $x \leq 3$ получим $0 \leq x \leq 3$. Возведем в квадрат еще раз: $36x^2 - 5x^4 = 36x^2 - 12x^3 + x^4$; $6x^4 - 12x^3 = 0$; $6x^3(x - 2) = 0$, отсюда $x = 2$, $x = 0$. Оба корня удовлетворяют области определения уравнения. Ответ: $x = 0$, $x = 2$.

3) $\sqrt{x^2 + 3x + 12} - \sqrt{x^2 + 3x} = 2$. Решение: домножим обе части уравнения

на $\sqrt{x^2+3x+12} + \sqrt{x^2+3x}$, получим:

$$(x^2+3x+12) - (x^2+3x) = 2(\sqrt{x^2+3x+12} + \sqrt{x^2+3x});$$

$\sqrt{x^2+3x+12} + \sqrt{x^2+3x} = 6$. Сложим данное уравнение с исходным:

$$2\sqrt{x^2+3x+12} = 8; \quad \sqrt{x^2+3x+12} = 4; \quad x^2+3x+12 = 16; \quad x^2+3x-4 = 0,$$

$x = 1$, $x = -4$. Оба корня удовлетворяют О.О.У. Ответ: $x = -4$, $x = 1$.

4) Аналогично 3).

164. 1) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2} = a$. Решение: О.О.У – $x \geq 2$. При $a < 0$ решений нет, при $a \geq 0$ возведем обе части уравнения в квадрат, получим $(x+1)(x-2) = a^2$,

$$x^2 - x - (2+a^2) = 0, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9+4a^2}}{2}. \quad \text{Так как } \sqrt{9+4a^2} \geq 3, \text{ то}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{9+4a^2}}{2} \geq \frac{1+3}{2} = 2, \quad \text{т.е. удовлетворяет области определения, а}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{9+4a^2}}{2} \leq \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{— не удовлетворяет области определения}$$

уравнения. Ответ: при $a < 0$ корней нет, при $a \geq 0$ $x = \frac{1 + \sqrt{9+4a^2}}{2}$.

2) Аналогично 1).

§10. Иррациональные неравенства

С в о й с т в а :

1. $a, b \geq 0, p \geq 0, a > b \Rightarrow a^p > b^p$.

2. $a, b \leq 0, p \geq 0, a > b \Rightarrow a^p < b^p$.

165. 1) $\begin{cases} 3-x \leq 2 \\ 2x+1 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 1,5$. Ответ: $1 \leq x \leq 1,5$.

2) $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$. Ответ: $x > 2$.

3) Указание: первое неравенство равносильно $-3 \leq x \leq 3$.

166. 1) $\sqrt{x} > 2$. Решение: О.О.Н. $x \geq 0$. $(\sqrt{x})^2 > 2^2$; $x > 4$. Ответ: $x > 4$.

2) $\sqrt{x} < 3$. Решение: О.О.Н. $x \geq 0$. Значит $0 \leq x < 3^2$. Ответ: $0 \leq x < 9$.

3) $\sqrt[3]{x} \geq 1$. Решение: О.О.Н. $x \geq 0$. $(\sqrt[3]{x})^3 \geq 1$; $x \geq 1$. Ответ: $x \geq 1$.

4), 5) Аналогично 6).

6) $\sqrt{2x} \leq 2$. Решение: О.О.Н. $x \geq 0$. Обе части неравенства положитель-

ны, можно возвести в квадрат, получим: $2x \leq 4$, $x \leq 2$. Ответ: $0 \leq x \leq 2$

167. 1) $\sqrt{x-2} > 3$. Решение: ООН $x \geq 2$. Т.к. обе части неравенства положительны, возведем в квадрат, получим $x-2 > 9$, $x > 11$. Ответ: $x > 11$.

2) $\sqrt{x-2} < 1$. Решение: ООН $x \geq 2$. $x-2 < 1$; $x < 3$. С учетом ООН $2 \leq x < 3$

3) $\sqrt{3-x} < 5$. Решение: ООН $x \leq 3$. $3-x < 25$; $x > -22$. С учетом ООН $-22 < x \leq 3$.

4) $\sqrt{4-x} > 3$. Решение: ООН $x \leq 4$. $4-x > 9$. С учетом ООН $x < -5$

5)–8) Аналогично 1)–4).

168. 1) $\sqrt{x^2-1} > 1$. Решение: ООН $x \geq 1$ или $x \leq -1$. Т.к. обе части неравенства положительны, возведем в квадрат, получим $x^2-1 > 1$, $x^2 > 2$, т.е.

$x > \sqrt{2}$ или $x < -\sqrt{2}$. Ответ: $x > \sqrt{2}$, $x < -\sqrt{2}$.

2) Аналогично 4).

3) Аналогично 1).

4) $\sqrt{25-x^2} < 4$. Решение: область определения неравенства $-5 \leq x \leq 5$. Т.к. обе части неравенства положительны, возведем в квадрат, получим $25-x^2 < 16$, $x^2 > 9$, т.е. $x > 3$ или $x < -3$. С учетом области определения получаем $-5 \leq x < -3$, $3 < x \leq 5$. Ответ: $-5 \leq x < -3$, $3 < x \leq 5$.

169. 1) $\sqrt{2x^2+3x-2} > 0$. Решение: неравенство выполнено, если

$2x^2+3x-2 > 0$, т.е. $(x+2)(2x-1) > 0$. Ответ: $x < -2$, $x > 0,5$.

2), 5), 6) Указание: неравенство выполнено при всех допустимых x .

3) $\sqrt{6x-x^2} < \sqrt{5}$. Решение: область определения неравенства $0 \leq x \leq 6$. Т.к. обе части неравенства неотрицательны, возведем в квадрат, получим: $6x-x^2 < 5$; $x^2-6x+5 > 0$; $(x-1)(x-5) > 0$, т.е. $x > 5$ или $x < 1$. С учетом области определения находим $0 \leq x < 1$, $5 < x \leq 6$.

Ответ: $0 \leq x < 1$, $5 < x \leq 6$.

4) Аналогично 3).

170. 1), 2), 3), 6) Указание: с учетом области определения возведите неравенства в квадрат.

4) $\sqrt{3x-2} > x-2$. Решение: ООН $x \geq \frac{2}{3}$. Если $x-2 < 0$, то неравенство выполнено, т.е. $\frac{2}{3} \leq x < 2$ является решением неравенства. Если $x-2 \geq 0$, возведем обе части неравенства в квадрат, получим: $3x-2 > x^2-4x+4$; $x^2-7x+6 < 0$, $1 < x < 6$. С учетом области определения и условия $x \geq 2$ получаем $2 \leq x < 6$. Объединяя решения, получим

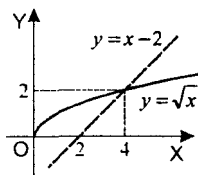


Рис. 27

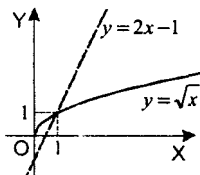


Рис. 28

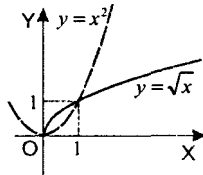


Рис. 29

$\frac{2}{3} \leq x < 6$. Ответ: $\frac{2}{3} \leq x < 6$.

5) Аналогично 4).

171. 1) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \sqrt{x-1}$. Решение: область определения неравенства $x \geq 1$. Перепишем неравенство в виде $\sqrt{x+1} < \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$. Т.к. обе части неравенства неотрицательны, возведем в квадрат: $x+1 < 2x-1+2\sqrt{x^2-x}$; $2-x < 2\sqrt{x^2-x}$. При $x > 2$ данное неравенство выполнено, т.к. $2-x < 0$. При $1 \leq x \leq 2$ возведем обе части неравенства в квадрат еще раз, получим:

$x^2 - 4x + 4 < 4x^2 - 4x$, $3x^2 > 4$, откуда $x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ (не удовлетворяет области

определения) и $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$. Объединяя полученные ответы, находим $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2) Аналогично 1).

172. 4) См. рис. 27.

173. 3) См. рис. 28; 4) См. рис. 29.

174. 1) $\sqrt{x-1} < a$. Решение: область определения неравенства $x \geq 1$.

При $a \leq 0$, очевидно, решений нет.

При $a > 0$ возведем обе части неравенства в квадрат, получим $x-1 < a^2$, т.е. $x < a^2 + 1$. С учетом области определения $1 \leq x < a^2 + 1$.

Ответ: при $a \leq 0$ решений нет, при $a > 0$

$1 \leq x < a^2 + 1$.

2) $\sqrt{2ax-x^2} \geq a-x$, если $a \leq 0$. Решение: 1 способ – аналогично 1).

II способ – графически. Рассмотрим график функции $y = \sqrt{2ax-x^2}$; $y^2 = 2ax-x^2$; $y^2 + (x-a)^2 = a^2$.

Это уравнение верхней полуокружности (т.к. $y \geq 0$)

с центром в точке $(a; 0)$ и радиусом $|a|$ (см. рис. 30).

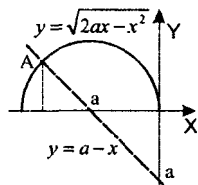


Рис. 30

Координаты точки A легко найти из геометрических соображений:

$$A = \left(a + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}; \frac{|a|\sqrt{2}}{2} \right). \text{ Т.е. решение } a \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \leq x \leq 0. \text{ Ответ: при } a = 0$$

$$x = 0, \text{ при } a < 0 \quad a \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \leq x \leq 0.$$

Упражнения к главе II

177. 1) $0,3^\pi < 0,3^{3,1415} < 3^{2/3} < 3^{0,5}$; 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\pi < \sqrt{2}^\pi < 1,9^\pi < \pi^\pi$;
 3) $5^{-2,1} < 5^{-2} < 5^{-0,7} < 5^{1/3}$; 4) $\pi^{2/3} < \sqrt{2}^{2/3} < 1,3^{2/3} < 0,5^{2/3}$.

178. 1) См. рис. 31.

2) См. рис. 32.

179. 1) $y = \sqrt[3]{1-x}$. Область определения $x \in \mathbf{R}$.

2) $y = (2-x^2)^{3/2}$. Решение: $2-x^2 \geq 0$, т.е. $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

3) $y = (3x^2+1)^2$. Решение: $3x^2+1 \neq 0$, что верно при всех $x \in \mathbf{R}$.

4) $y = \sqrt{x^2-x-2}$. Решение: $x^2-x-2 \geq 0$, т.е. $x \leq -1$ и $x \geq 2$.

180. 1) $y = 0,5x+3$. Выразим x через y : $x = 2y-6$, т.е. обратная функция $y = 2x-6$. Область определения и множество значений – множество \mathbf{R} .

2) $y = \frac{2}{x-3}$. Выразим x через y : $x = \frac{2}{y}+3$, т.е. обратная функция $y = \frac{2}{x}+3$.

Область определения $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, множество значений – $y \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$.

3) $y = (x+2)^3$. Выразим x через y : $x = \sqrt[3]{y}-2$, т.е. обратная функция

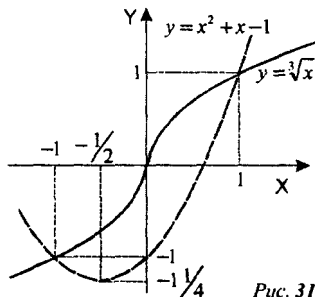


Рис. 31

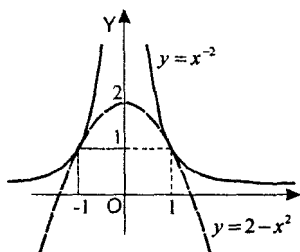


Рис. 32

$y = \sqrt[3]{x} - 2$. Область определения и множество значений – множество \mathbf{R} .

4) $y = x^3 - 1$. Выразим x через y : $x = \sqrt[3]{y+1}$, т.е. обратная функция

$y = \sqrt[3]{x+1}$. Область определения и множество значений – множество \mathbf{R} .

181. См. задачу 134.

182. 1)–2) Ответ: данные уравнения равносильны.

183. 1), 2), 5), 6) Указание: при x , удовлетворяющих области определения уравнения, возведите обе части уравнения в квадрат.

3), 4) Указание: при x , удовлетворяющих области определения и $x \geq 0$, возведите обе части уравнения в квадрат.

185. 1), 2) Функции взаимнообратные.

3), 4) Функции не являются взаимнообратными.

186. 1) $y = 2 + \sqrt{x+2}$. Решение: область определения данной функции $x \geq -2$, множество значений $y \geq 2$. Т.е. область определения обратной функции $x \geq 2$, множество значений $y \geq -2$. Кроме того, $y - 2 = \sqrt{x+2}$; $(y-2)^2 = x+2$, $x = (y-2)^2 - 2$, т.е. обратная функция $y = (x-2)^2 - 2$ при $x \geq 2$. Ответ: $y = (x-2)^2 - 2$ при $x \geq 2$.

2) $y = 2 - \sqrt{x+4}$. Решение: выразим x через y : $x = (2-y)^2 - 4$; $x = y^2 - 4y$. Обратная функция $y = x^2 - 4x$. ООФ $x \leq 2$, множество значений $y \geq -4$.

3) $y = \sqrt{3-x} - 1$. Решение: выразим x через y : $x = 3 - (y+1)^2$; $x = -y^2 - 2y + 2$. Т.е. обратная функция $y = -x^2 - 2x + 2$. ООФ $x \geq -1$, мн.знач. $y \leq 3$.

4) $y = \sqrt{1-x} + 3$. Решение: выразим x через y : $x = 1 - (y-3)^2$; $x = -y^2 + 6y - 8$. Т.е. обратная функция $y = -x^2 + 6x - 8$. ООФ $x \geq 3$, мн.знач. $y \leq 1$.

187. Указание: преобразуйте уравнение $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ и возведите в квадрат, аналогично задаче 159.

188. 1) $\sqrt{x+4} - 3\sqrt[3]{x+4} + 2 = 0$. Решение: О.О.У. $x \geq -4$. Сделаем замену $u = \sqrt[3]{x+4}$, тогда $u^2 - 3u + 2 = 0$, т.е. $u = 1$ или $u = 2$; $\sqrt[3]{x+4} = 1$ или $\sqrt[3]{x+4} = 2$, откуда $x = -3$, $x = 12$. Ответ: $x = -3$, $x = 12$.

2) $\sqrt{x-3} = 3\sqrt[3]{x-3} + 4$. Решение: О.О.У. $x \geq 3$. Сделаем замену $u = \sqrt[3]{x-3}$, тогда $u^2 - 3u - 4 = 0$, т.е. $u = 4$ или $u = -1$; $\sqrt[3]{x-3} = 4$ или $\sqrt[3]{x-3} = -1$ (что невозможно), откуда $x = 259$. Ответ: $x = 259$.

3) аналогично 1).

4) Указание: сделайте замену $u = \sqrt{x^2 + 3x} \geq 0$, тогда $u^2 + u - 2 = 0$.

5) $\frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}} = 2$. Решение: О.О.У. $-3 \leq x \leq 3$, $x \neq 0$. Сделаем заме-

ну $\sqrt{3-x} = u \geq 0$, $\sqrt{3+x} = v \geq 0$. Тогда $\frac{u+v}{u-v} = 2$, кроме того, $u^2 + v^2 = 6$.

Из первого уравнения $u = 3v$, тогда $10v^2 = 6$, $v^2 = \frac{3}{5}$, т.е. $3+x = \frac{3}{5}$, $x = -2,4$. Ответ: $x = -2,4$.

6) $\sqrt{x+6} - 4\sqrt{x+2} + \sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}} = 1$. Решение: О.О.У. $x \geq -2$. Замечим, что $x+6 - 4\sqrt{x+2} = (\sqrt{x+2} - 2)^2$; $11+x-6\sqrt{x+2} = (\sqrt{x+2} - 3)^2$;

$\sqrt{x+6} - 4\sqrt{x+2} + \sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}} = |\sqrt{x+2} - 2| + |\sqrt{x+2} - 3|$. Если $-2 \leq x < 2$ тогда $2 - \sqrt{x+2} + 3 - \sqrt{x+2} = 1$, $2 = \sqrt{x+2}$, $x = 2$ — не удовлетворяет условию $-2 \leq x < 2$. Если $2 \leq x < 7$, тогда $\sqrt{x+2} - 2 + 3 - \sqrt{x+2} = 1$ — верное равенство, т.е. $2 \leq x < 7$ — решение. Если же $x \geq 7$, тогда $\sqrt{x+2} - 2 + \sqrt{x+2} - 3 = 1$, $\sqrt{x+2} = 3$, $x = 7$. Ответ: $2 \leq x \leq 7$.

189. 1) $\sqrt{x+1} < x-1$. Решение: О.О.Н. $x \geq -1$. При $x < 1$ неравенство не верно, при $x \geq 1$ обе части неравенства неотрицательны, можно возвести в квадрат. Тогда $x+1 < x^2 - 2x+1$; $x^2 - 3x > 0$, откуда $x > 3$ или $x < 0$ (не удовлетворяет условию $x \geq 1$). Ответ: $x > 3$.

2) $\sqrt{1-x} > x+1$. Решение: О.О.Н. $x \leq 1$. При $x \leq -1$ неравенство выполнено. При $-1 \leq x \leq 1$ обе части неравенства неотрицательны, возведем в квадрат, получим: $x^2 + 3x < 0$. Отсюда $-3 < x < 0$, с учетом условия $-1 \leq x \leq 1$ получаем $-1 \leq x < 0$. Объединяя оба ответа, окончательно получим $x < 0$. Ответ: $x < 0$.

3) $\sqrt{3x-2} > x-2$. Решение: О.О.Н. $x \geq \frac{2}{3}$. При $\frac{2}{3} \leq x < 2$ неравенство выполнено. При $x \geq 2$ обе части неравенства неотрицательны, возведем в квадрат. Получим $3x-2 > x^2 - 4x+4$; $x^2 - 7x+6 < 0$; $1 < x < 6$, с учетом условия $x \geq 2$, получаем $2 \leq x < 6$. Объединим оба ответа, окончательно получим $\frac{2}{3} \leq x < 6$. Ответ: $\frac{2}{3} \leq x < 6$.

4) $\sqrt{2x+1} \leq x+1$. Решение: О.О.Н. $x \geq -0,5$. При $x \geq -0,5$ обе части неравенства неотрицательны, возведем в квадрат, получим:

$2x+1 \leq x^2+2x+1$; $x^2 \geq 0$, что верно при любых x . Таким образом решением неравенства является вся О.О.Н. Ответ: $x \geq -0,5$.

190. 1) Указание: решите неравенство $x^2 - 13x + 40 \leq 0$ с учетом области определения.

2) Указание: при $x < -4$ неравенство верно, при $x > -4$ возведите обе части неравенства в квадрат.

3) Указание: возведите обе части неравенства в квадрат.

4) $\sqrt{3-x} < \sqrt{7+x} + \sqrt{10+x}$. Решение: область определения неравенства

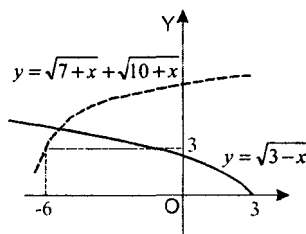


Рис. 33

$-7 \leq x \leq 3$. Заметим, что функция $y = \sqrt{3-x}$ убывает (строго), а функция $y = \sqrt{7+x} + \sqrt{10+x}$ возрастает (строго). Следовательно графики пересекаются в единственной точке (см. рис. 33). Ее легко угадать $(-6; 3)$. Значит неравенство верно при $-6 < x \leq 3$.

Ответ: $-6 < x \leq 3$.

191. При различных значениях a решить неравенство:

1) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-6} < a$. Решение: область

определения неравенства $x \geq 6$. При $a \leq 0$ неравенство не выполнено, при $a > 0$ возведем обе части в квадрат, получим:

$$2x - 8 + 2\sqrt{x^2 - 8x + 12} < a^2; \quad \sqrt{x^2 - 8x + 12} < -x + 4 + \frac{a^2}{2}. \quad \text{При}$$

$x \geq 4 + \frac{a^2}{2}$ неравенство не выполнено, при $x < 4 + \frac{a^2}{2}$ можно возвести

обе части в квадрат. Тогда $x^2 - 8x + 12 < x^2 - (8 + a^2)x + \left(4 + \frac{a^2}{2}\right)^2$;

$$a^2 x < \left(4 + \frac{a^2}{2}\right)^2 - 12. \quad \text{Т.к. } a^2 > 0, \text{ то } x < \frac{4 + 4a^2 + \frac{a^4}{4}}{a^2}; \quad x < \frac{16 + 16a^2 + a^4}{4a^2}.$$

С учетом области определения $x \geq 6$. Осталось выяснить, когда условие

$x < 4 + \frac{a^2}{2}$ не противоречит условию $x \geq 6$. Очевидно, при $x > 2$. При

таких a $6 \leq x < \frac{4}{a^2} + 4 + \frac{a^2}{4} < 4 + \frac{a^2}{2}$.

Ответ: при $a \leq 2$ решений нет, при $a > 2$ $6 \leq x < \frac{4}{a^2} + 4 + \frac{a^2}{4}$.

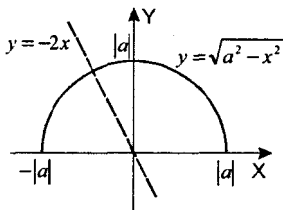


Рис. 34

2) $2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$. Решение: область определения неравенства $|x| \leq |a|$.

I способ – аналитический. Перепишем неравенство в виде $\sqrt{a^2 - x^2} > -2x$, при $x \geq 0$ неравенство верно, при $x < 0$ возведем в квадрат, получим $a^2 - x^2 > 4x^2$,

$5x^2 < a^2$, откуда $\frac{-|a|}{\sqrt{5}} < x < 0$. совме-

щая оба ответа и область определения, окончательно получаем

$\frac{-|a|}{\sqrt{5}} < x \leq |a|$. При $a > 0$ – решение нет (промежуток вырожден).

II способ – графический (см. рис. 34). Точка пересечения графиков

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (полуокружность) и

$y = -2x$ легко находится из геометрических соображений.

Ответ: при $a \neq 0$ $\frac{-|a|}{\sqrt{5}} < x \leq |a|$, при $a = 0$ решений нет.

Глава III

Показательная функция

§11. Показательная функция, ее свойства и график

Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$.

Свойства: ($a > 0, b > 0$, x, x_1, x_2 – действительные числа)

$$1^\circ. a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2};$$

$$2^\circ. \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2};$$

$$3^\circ. (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2};$$

$$4^\circ. (ab)^x = a^x \cdot b^x;$$

$$5^\circ. \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$6^\circ. a^x > 0;$$

$$7^\circ. a^x > 1, \text{ если } a > 1, x > 0;$$

$$8^\circ. a^{x_1} < a^{x_2}, \text{ если } a > 1, x_1 < x_2;$$

$$9^\circ. a^{x_1} > a^{x_2}, \text{ если } 0 < a < 1, x_1 < x_2.$$

195. 1) $1,7^3 > 1$;

2) $0,3^2 < 1$;

3) $3,2^{1,5} < 3,2^{1,6}$;

4) $0,2^{-3} < 0,2^{-2}$;

5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$;

6) $3^\pi > 3^{3,14}$.

196. 1) $(0,1)^{\sqrt{2}} < 1$, т.к. $0,1 < 1, \sqrt{2} > 0$;

2) $(3,5)^{0,1} > 1$, т.к. $3,5 > 1, 0,1 > 0$;

3) $\pi^{-2,7} < 1$, т.к. $\pi > 1, -2,7 < 0$;

4) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2} > 1$, т.к. $\frac{\sqrt{5}}{5} < 1, -1,2 < 0$.

197. 1) $y = 2^x$ и $y = 8$. Решение: необходимо решить уравнение: $2^x = 8$. Т.к.

$8 = 2^3$, то $x = 3$. Ответ: $x = 3$.

2) $y = 3^x$ и $y = \frac{1}{3}$. Решение: необходимо решить уравнение: $3^x = \frac{1}{3}$. Т.к.

$$3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, \text{ то } x = -1. \text{ Ответ: } x = -1.$$

3) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $y = \frac{1}{16}$. Решение: необходимо решить уравнение:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{16}. \text{ Т.к. } \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2, \text{ то } x = 2. \text{ Ответ: } x = 2.$$

4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = 9$. Решение: необходимо решить уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$.

$$\text{Т.к. } 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}, \text{ то } x = -2. \text{ Ответ: } x = -2.$$

199. 1) функция возрастает; 2) функция возрастает;
3) функция убывает; 4) функция возрастает.

200. 1) $x < 0$; 2) $x > 0$; 3) $x > 1$; 4) $x < -1$.

201. 1) Указание: данный график получается

из графика $y = 3^x$ сдвигом на 2 единицы вниз.

2) Указание: данный график получается из

графика $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ сдвигом на 3 единицы

вверх.

3) См. рис. 35.

4) См. рис. 35.

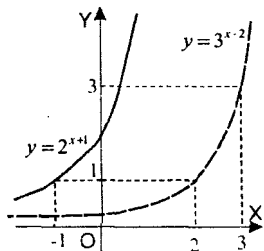


Рис. 35

202. Доказать, что графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ симметричны относительно оси ординат. Решение: для симметрии необходимо и достаточно выполнение условия: точка (x_0, y_0) принадлежит графику первой функции тогда и только тогда, когда точка $(-x_0, y_0)$ принадлежит графику второй функции.

Но $2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$, т.е. данное условие выполнено.

203. Указание: на отрезке $[-1; 2]$ функция возрастает (строго).

204. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $y = 2^{|x|}$ на отрезке $[-1; 1]$. Решение: данная функция симметрична относительно оси орди-

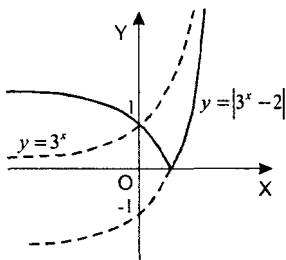


Рис. 36

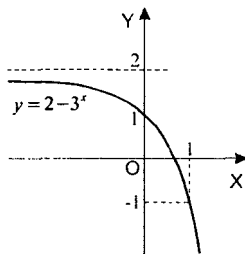


Рис. 37

нат, следовательно достаточно рассмотреть функцию $y = 2^{|x|}$ только на отрезке $[0; 1]$. На этом отрезке она совпадает с функцией $y = 2^x$, которая возрастает (строго). Следовательно минимальное значение $y(0) = 1$, а максимальное $y(1) = y(-1) = 2$. Ответ: 1 и 2.

205. 1), 2) Указание: график функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x), x \geq 0$ отражением относительно оси OY .
3) См. рис. 36; 4) См. рис. 37.

206. $T = 1; t_1 = 1,5; t_2 = 3,5; m_0 = 250$. Решение: по формуле $m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ получаем: $m(t_1) = 250 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1,5} \approx 88,42$; $m(t_2) = 250 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3,5} \approx 22,12$.

207. Решение: $t = 5, a = 4$, где a — прирост в процентах, тогда по формуле

$$m(t) = \left(1 + \frac{a}{100}\right)^t \cdot 4 \cdot 10^5 \text{ получаем: } m(5) = (1 + 0,04)^5 \cdot 4 \cdot 10^5 \approx 4,87 \cdot 10^5.$$

§12. Показательные уравнения

208. 1) $4^{x-1} = 1$. Решение: $1 = 4^0$, т.е. $4^{x-1} = 4^0$, откуда $x-1 = 0$, $x = 1$.

2) $0,3^{3x-2} = 1$. Решение: $1 = 0,3^0$, т.е. $0,3^{3x-2} = 0,3^0$, откуда $3x-2 = 0$, $x = \frac{2}{3}$.

3) $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$. Решение: $2x = 4\sqrt{3}$, откуда $x = 2\sqrt{3}$.

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$. Решение: $3^{-3x} = 3^2$, откуда $-3x = 2$, $x = -\frac{2}{3}$.

209. 1) $27^x = \frac{1}{3}$. Решение: т.к. $27^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x}$, то $-3x = 1$, $x = -\frac{1}{3}$. Ответ: $x = -\frac{1}{3}$

2) $400^x = \frac{1}{20}$. Решение: т.к. $400^x = \left(\frac{1}{20}\right)^{-2x}$, то $-2x = 1$, $x = -\frac{1}{2}$. Ответ: $-\frac{1}{2}$

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$. Решение: т.к. $25 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$, то $x = -2$. Ответ: $x = -2$.

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$. Решение: т.к. $\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$, то $x = 4$. Ответ: $x = 4$.

210. 1) $3 \cdot 9^x = 81$. Решение: уравнение равносильно $3 \cdot 3^{2x} = 3^4$, т.е. $3^{2x+1} = 3^4$. Отсюда $2x+1 = 4$, $x = 1,5$. Ответ: $x = 1,5$.

2) $2 \cdot 4^x = 64$. Решение: уравнение равносильно $2 \cdot 2^{2x} = 2^6$, т.е. $2^{2x+1} = 2^6$. Отсюда $2x+1 = 6$, $x = 2,5$. Ответ: $x = 2,5$.

3) $3^{x+\frac{1}{2}} \cdot 3^{x-2} = 1$. Решение: уравнение равносильно $3^{x+\frac{1}{2}+x-2} = 3^0$. Отсюда $x + \frac{1}{2} + x - 2 = 0$, $x = \frac{3}{4}$. Ответ: $x = \frac{3}{4}$.

4) $0,5^{x+7} \cdot 0,5^{1-2x} = 2$. Решение: $0,5^{x+7} \cdot 0,5^{1-2x} = 0,5^{x+7+1-2x} = 0,5^{8-x}$, $2 = 0,5^{-1}$, поэтому $8-x = -1$, откуда $x = 9$. Ответ: $x = 9$.

5) $0,6^x \cdot 0,6^3 = \frac{0,6^{2x}}{0,6^5}$. Решение: уравнение равносильно $0,6^{3+x} = 0,6^{2x-5}$. Отсюда $3+x = 2x-5$, $x = 8$. Ответ: $x = 8$.

6) $6^{3x} \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$. Решение: $6^{3x} \cdot \frac{1}{6} = 6^{3x} \cdot 6^{-1} = 6^{3x-1}$, $6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2x} = 6 \cdot 6^{-2x} = 6^{1-2x}$, т.е. $6^{3x-1} = 6^{1-2x}$. Т.к. показательная функция – взаимно однозначная, то $3x-1 = 1-2x$, т.е. $x = 0,4$. Ответ: $x = 0,4$.

211. 1) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$. Решение: $3^{2x-1}(1+3) = 108$; $3^{2x-1} = 27$; $3^{2x-1} = 3^3$. Отсюда: $2x-1 = 3$, $x = 2$. Ответ: $x = 2$.

2) $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$. Решение: $2^{3x-2}(2^4 - 1) = 30$; $2^{3x-2} = 2$. Отсюда: $3x-2 = 1$, $x = 1$. Ответ: $x = 1$.

3) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$. Решение: $2^{x-1}(2^2 + 1 + 2) = 28$; $2^{x-1} = 4$; $2^{x-1} = 2^2$. Отсюда: $x-1 = 2$, $x = 3$. Ответ: $x = 3$.

4) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$. Решение: $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 3^{x-1}(1-3+9) = 7 \cdot 3^{x-1}$, т.е. $7 \cdot 3^{x-1} = 63$; $3^{x-1} = 9$; $x-1 = 2$, откуда $x = 3$. Ответ: $x = 3$.

212. 1) $5^x = 8^x$. Решение: так как $5^x > 0$, то разделим обе части на 5^x , полу-

чим: $1 = \frac{8^x}{5^x} = \left(\frac{8}{5}\right)^x$, откуда $x = 0$. Ответ: $x = 0$.

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Решение: домножим обе части на 2^x , получим:

$1 = \frac{2^x}{3^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, откуда $x = 0$. Ответ: $x = 0$.

3) $3^x = 5^{2x}$. Решение: так как $5^{2x} > 0$, то разделим обе части на 5^{2x} , полу-

чим: $\frac{3^x}{5^{2x}} = \frac{3^x}{25^x} = \left(\frac{3}{25}\right)^x = 1$, откуда $x = 0$. Ответ: $x = 0$.

4) $4^x = 3^{\frac{x}{2}}$. Решение: возведем обе части в квадрат, получим $4^{2x} = 3^x$. Раз-

делим на 3^x , получим: $\left(\frac{4^2}{3}\right)^x = 1$, откуда $x = 0$. Ответ: $x = 0$.

213. 1) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$. Решение: заменим $u = 3^x$, тогда $u^2 - 4u + 3 = 0$. Откуда $u = 3$ или $u = 1$. Т.е. $3^x = 3$, $x = 1$ или $3^x = 1$, $x = 0$. Ответ: $x = 1$, $x = 0$

2) $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$. Решение: заменим $u = 4^x$, тогда $u^2 - 17u + 16 = 0$; $u = 16$ или $u = 1$. Т.е. $4^x = 16$, $x = 2$ или $4^x = 1$, $x = 0$. Ответ: $x = 2$, $x = 0$.

3) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$. Решение: заменим $u = 5^x$, тогда $u^2 - 6u + 5 = 0$. Откуда $u = 5$ или $u = 1$. Т.е. $5^x = 5$, $x = 1$ или $5^x = 1$, $x = 0$. Ответ: $x = 1$, $x = 0$

4) $64^x - 8^x - 56 = 0$. Решение: заменим $u = 8^x$, тогда $u^2 - u - 56 = 0$. Откуда $u = 8$ и $u = -7$. Т.е. $8^x = 8$, $x = 1$ или $8^x = -7$, т.е. корней нет. Ответ: $x = 1$

214. 1) $3^{x^2+x-12} = 1$. Решение: $3^{x^2+x-12} = 3^0$, т.е. $x^2 + x - 12 = 0$. Откуда $x = 3$, $x = -4$. Ответ: $x = 3$, $x = -4$.

2) $2^{x^2-7x+10} = 1$. Решение: $2^{x^2-7x+10} = 2^0$, т.е. $x^2 - 7x + 10 = 0$. Откуда $x = 5$, $x = 2$. Ответ: $x = 5$, $x = 2$.

3) $2^{\frac{x-1}{x-2}} = 4$. Решение: $2^{\frac{x-1}{x-2}} = 2^2$, т.е. $\frac{x-1}{x-2} = 2$; $x-1 = 2x-4$, $x \neq 2$. Откуда $x = 3$. Ответ: $x = 3$.

4) $0,5^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{x+1}}$. Решение: $2^{-\frac{1}{x}} = 2^{\frac{2}{x+1}}$, т.е. $-\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$; $-x-1 = 2x$, $x \neq -1$, $x \neq 0$. Откуда $x = -\frac{1}{3}$. Ответ: $x = -\frac{1}{3}$.

215. 1) $0,3^{x^3-x^2+x-1} = 1$. Решение: данное уравнение равносильно уравнению

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$, т.е. $(x^2 + 1)(x - 1) = 0$, которое имеет единственный корень $x = 1$. Ответ: $x = 1$.

2) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3} = 1$. Решение: уравнение равносильно $-x^2 - 2x + 3 = 0$,

откуда $x = -3$ и $x = 1$. Ответ: $x = -3$, $x = 1$.

3) Указание: $5,1\sqrt{5,1} = 5,1^{\frac{3}{2}}$, аналогично 1).

4) Указание: $100^{x^2-1} = 10^{2(x^2-1)}$, аналогично 1).

216. Указание:

1) $\sqrt[3]{100} = 10^{\frac{1}{3}}$;

2) $\sqrt[4]{10000} = 10^{\frac{4}{5}}$;

3) $225 = 15^2$;

4) $\frac{1}{\sqrt[4]{10000}} = 10^{-1}$;

5) $(\sqrt{10})^x = 10^{\frac{x}{2}}$

6) $100^{x^2-1} = 10^{2x^2-2}$.

217. 1) Указание: данное уравнение равносильно уравнению $x^2 - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}$.

2) $5^{0,1x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-0,06} = 5^{x^2}$. Решение: преобразуем уравнение $5^{0,1x+0,06} = 5^{x^2}$,

тогда $0,1x + 0,06 = x^2$; $50x^2 - 5x - 3 = 0$. Отсюда $x = 0,3$, $x = -0,2$.

Ответ: $x = 0,3$, $x = -0,2$.

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$. Решение: О.О.У. $x \leq 1$. Преобразуем уравнение

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$, тогда $\sqrt{1-x} = 2x + 1$. При $2x + 1 \geq 0$ возведем в квадрат, получим $1-x = 4x^2 + 4x + 1$; $4x^2 + 5x = 0$. Т.с. $x = 0$ и $x = -\frac{5}{4}$ (не удовлетворяют условию $2x + 1 \geq 0$). Ответ: $x = 0$.

4) $0,7^{\sqrt{x+12}} \cdot 0,7^{-2} = 0,7^{\sqrt{x}}$. Решение: О.О.У. $x \geq 0$. Преобразуем уравнение

к виду $0,7^{\sqrt{x+12}-2} = 0,7^{\sqrt{x}}$, тогда $\sqrt{x+12} - 2 = \sqrt{x}$; $\sqrt{x+12} = 2 + \sqrt{x}$. Т.к. обе части положительны, возведем в квадрат, получим

$x + 12 = x + 4\sqrt{x} + 4$, т.е. $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$. Ответ: $x = 4$.

218. 1) Указание: $7^x - 7^{x-1} = 7^{x-1} \cdot (7-1)$.

2) Указание: $3^{2y-1} + 3^{2y-2} - 3^{2y-4} = 3^{2y-4} \cdot (3^3 + 3^2 - 1)$.

3) Указание: $5^{3x} + 3 \cdot 5^{3x-2} = 5^{3x-2} \cdot (5^2 + 3)$.

4) Указание: $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x = 2^{x-1} \cdot (2^2 + 3 - 5 \cdot 2)$.

219. 1) $7^{x-2} = 3^{2-x}$. Решение: разделим уравнение на $3^{2-x} > 0$, получим:

$$\frac{7^{x-2}}{3^{2-x}} = 1; (7 \cdot 3)^{x-2} = 1, \text{ т.е. } x-2=0, x=2. \text{ Ответ: } x=2.$$

2) $2^{x-3} = 3^{3-x}$. Решение: разделим уравнение на $3^{3-x} > 0$, получим:

$$\frac{2^{x-3}}{3^{3-x}} = 1; (2 \cdot 3)^{x-3} = 1, \text{ т.е. } x-3=0, x=3. \text{ Ответ: } x=3.$$

3) $3^{\frac{x+2}{4}} = 5^{x+2}$. Решение: т.к. обе части уравнения положительны, возведем в четвертую степень и разделим на $5^{4(x+2)} > 0$, получим: $\frac{3^{x+2}}{5^{4(x+2)}} = 1;$

$$\left(\frac{3}{5^4}\right)^{x+2} = 1, \text{ т.е. } x+2=0, x=-2. \text{ Ответ: } x=-2.$$

4) $4^{\frac{x-3}{2}} = 3^{2(x-3)}$. Решение: разделим обе части уравнения на $3^{2(x-3)} > 0$,

$$\text{получим: } 1 = \frac{4^{\frac{x-3}{2}}}{3^{2(x-3)}} = \frac{(\sqrt{4})^{x-3}}{(3^2)^{x-3}} = \frac{2^{x-3}}{9^{x-3}} = \left(\frac{2}{9}\right)^{x-3}, \text{ т.е. } x-3=0. \text{ Ответ: } x=3.$$

220. Указание: так как показательная функция взаимно однозначная, то равенства выполнены, если равны показатели степени.

221. 1)–3) Аналогично 4).

4). $3^{|x|} = 3^{|2-x|-1}$.

Решение: так как показательная функция взаимно однозначная, то $|x| = |2-x| - 1$. Рассмотрим три случая: а) $x < 0$, тогда $-x = 2 - x - 1$, т.е. $0=1$, значит в этом случае корней нет; б) $0 \leq x < 2$, тогда $x = 2 - x - 1$, т.е. $x = 0,5$; в) $x \geq 2$, тогда $x = x - 2 - 1$, т.е. $0=-3$, значит в этом случае корней также нет. Ответ: $x = 0,5$.

222. 1) $3^{x+3} + 3^x = 7^{x+1} + 5 \cdot 7^x$. Решение: вынесем общие множители за скобку

$$3^x(3^3 + 1) = 7^x(7 + 5); 3^x \cdot 28 = 7^x \cdot 12; 3^x \cdot 7 = 7^x \cdot 3; 3^{x-1} = 7^{x-1}. \text{ Разделим}$$

обе части на $7^{x-1} > 0$, получим $\left(\frac{3}{7}\right)^{x-1} = 1; x-1=0, x=1. \text{ Ответ: } x=1.$

2) Указание: уравнение равносильно $3^{x+4} - 3^{x+3} = 5^{x+4} - 3 \cdot 5^{x+3}$;

$$3^{x+3}(3-1) = 5^{x+3}(5-3); 3^{x+3} = 5^{x+3}.$$

3) $2^{8-x} + 7^{3-x} = 7^{4-x} + 2^{3-x} \cdot 11$. Решение: преобразуем данное уравнение:

$$2^{8-x} - 2^{3-x} \cdot 11 = 7^{4-x} - 7^{3-x}; 32 \cdot 2^{3-x} - 11 \cdot 2^{3-x} = 7 \cdot 7^{3-x} - 7^{3-x}; 21 \cdot 2^{3-x} = 6 \cdot 7^{3-x}.$$

Тогда $\left(\frac{2}{7}\right)^{3-x} = \frac{2}{7}$, т.е. $3-x=1$, $x=2$. Ответ: $x=2$.

4) $2^{x+1} + 2^{x-1} - 3^{x-1} = 3^{x-2} - 2^{x-3} + 2 \cdot 3^{x-3}$. Решение: преобразуем уравнение:

$$(16+4+1) \cdot 2^{x-3} = (3+9+2) \cdot 3^{x-3}; \left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} = \frac{2}{3}. \text{ Т.е. } x-3=1, x=4.$$

Ответ: $x=4$.

223. 1)–4) Указание: соответствующей заменой сведите уравнение к квадратному. См. задачу 6 §12 учебника.

5) Аналогично 6).

6) $5^{3x+1} + 34 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 5^x = 0$. Решение: сделаем замену $5^x = u > 0$, тогда

$$5u^3 + 34u^2 - 7u = 0. \text{ То есть } u(5u-1)(u+7) = 0, \text{ откуда } u = \frac{1}{5} \text{ и } u = 0,$$

$$u = -7 \text{ (не удовлетворяют } u > 0). \text{ Тогда } 5^x = \frac{1}{5}, x = -1. \text{ Ответ: } x = -1.$$

224. При каких значениях x сумма чисел 2^{x-1} , 2^{x-4} и 2^{x-2} равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии 6,5; 3,25; 1,625; ...?

Решение: данная геометрическая прогрессия имеет знаменатель 0,5, следовательно ее сумма равна

$$\frac{6,5}{1-0,5} = 13. \text{ Т.е. необходимо решить уравнение}$$

$$2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-4} = 13. \quad 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-4} = (8+4+1) \cdot 2^{x-4}, \text{ откуда}$$

$$2^{x-4} = 1, \text{ т.е. } x = 4. \text{ Ответ: } x = 4.$$

225. 1), 2) Указание: см. задачу 212 п. 3).

3) Указание: преобразуйте уравнение к виду $6^x = 6^{2x^2}$.

4) Указание: преобразуйте уравнение к виду $3^{-2\sqrt{x-1}} = 3^{-3}$.

226. 1) $4 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x = 0$.

Решение: разделим обе части уравнения на $4^x \neq 0$, получим:

$$4 \cdot \frac{9^x}{4^x} - 13 \cdot \frac{6^x}{4^x} + 9 = 0. \text{ Преобразуем полученное уравнение:}$$

$$4 \cdot \frac{3^{2x}}{2^{2x}} - 13 \cdot \frac{3^x \cdot 2^x}{2^{2x}} + 9 = 0; 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 9 = 0.$$

Сделаем замену $\left(\frac{3}{2}\right)^x = u > 0$, тогда $4u^2 - 13u + 9 = 0$, т.е. $u = 1$ и $u = \frac{9}{4}$.

Отсюда находим решения $x = 0$ и $x = 2$. Ответ: $x = 0$, $x = 2$.

2) Указание: разделите обе части уравнения на 16^x и сделайте замену

$$u = \left(\frac{3}{4}\right)^x. \text{ Аналогично 1).}$$

227. 1) $4^x + 25^x = 29$. Решение: так как функции $y = 4^x$ и $y = 25^x$ строго возрастают, то и функция $y = 4^x + 25^x$ строго возрастает, а значит, принимает каждое свое значение ровно один раз.

2) Аналогично 1).

§13. Показательные неравенства

228. 1)–5) Аналогично 6).

6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leq \frac{1}{9}$. Решение: по свойству 9 (§12) данное неравенство равносильно неравенству $x-1 \geq 2$, т.е. $x \geq 3$. Ответ: $x \geq 3$.

229. См. задачу 3 §13 учебника.

230. 1) См. рис. 38.

2) Аналогично 1).

3) См. рис. 39.

4) Аналогично 3).

231. 1)–3) Аналогично 4).

4) $\left(2\frac{2}{3}\right)^{6x^2+x} \leq 7\frac{1}{9}$. Решение: преобразуем неравенство к виду $\left(\frac{8}{3}\right)^{6x^2+x} \leq \frac{64}{9}$, тогда по свойству 8 (§11) данное неравенство равносильно $6x^2 + x \leq 2$,

откуда $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$. Ответ: $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

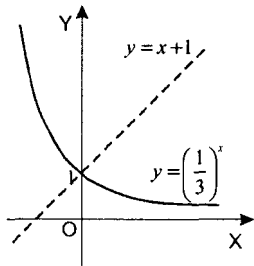


Рис. 38

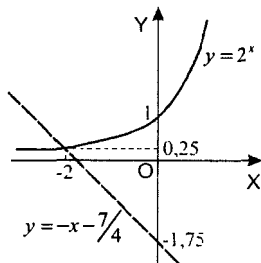


Рис. 39

232. 1) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$. Решение: $3^{x+2} + 3^{x-1} = 3^{x-1}(3^3 + 1) = 28 \cdot 3^{x-1}$, т.е. неравенство равносильно $28 \cdot 3^{x-1} < 28$; $3^{x-1} < 1$. Т.е. $x-1 < 0$, $x < 1$. Ответ: $x < 1$.
- 2) $2^{x-1} + 2^{x+3} > 17$. Решение: $2^{x-1} + 2^{x+3} = 2^{x-1}(1 + 2^4) = 17 \cdot 2^{x-1}$, т.е. неравенство равносильно: $17 \cdot 2^{x-1} > 17$; $2^{x-1} > 1$. Т.е. $x-1 > 0$, $x > 1$. Ответ: $x > 1$.
- 3) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$. Решение: $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} = 2^{2x-3}(4 + 2 + 1)$; т.е. $2^{2x-3} \geq 64$; $2x - 3 \geq 6$, $x \geq 4,5$. Ответ: $x \geq 4,5$.
- 4) Указание: неравенство равносильно $5^{3x-3} \cdot 624 \leq 624$.
233. 1) Указание: сделайте замену $u = 3^x$, тогда $u^2 - u - 6 > 0$.
- 2) Указание: сделайте замену $u = 2^x$, тогда $u^2 - u < 12$.
- 3) Указание: сделайте замену $u = 5^x$, тогда $5u^2 + 4u - 1 > 0$.
- 4) Указание: сделайте замену $u = 3^x$, тогда $3u^2 - 11u < 4$.
234. 1) $y = \sqrt{25^x - 5^x}$. Решение: необходимо $25^x - 5^x \geq 0$. Сделаем замену $5^x = u > 0$, тогда $u^2 - u \geq 0$, откуда $u \leq 0$ (не удовлетворяет условию $u > 0$) или $u \geq 1$, т.е. $5^x \geq 1$, $x \geq 0$. Ответ: $x \geq 0$.
- 2) $y = \sqrt{4^x - 1}$. Решение: $4^x - 1 \geq 0$; $4^x \geq 1$. Т.е. $x \geq 0$. Ответ: $x \geq 0$.
235. При каких значениях x значения функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ больше значений функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 12$? Решение: необходимо решить неравенство $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^x + 12$. Сделаем замену $\left(\frac{1}{2}\right)^x = u > 0$, тогда $u^2 - u - 12 > 0$, т.е. $u > 4$ или $u < -3$ (не удовлетворяет условию $u > 0$). Тогда $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$, по свойству 9 (§11) $x < -2$. Ответ: $x < -2$.
236. 1) Аналогично 2); 2) См. рис. 40;
3) Аналогично 4); 4) См. рис. 41.
237. 1) См. рис. 42; 2) См. рис. 43;
3) См. рис. 44; 4) См. рис. 45.
238. 1) $11^{\sqrt{x+6}} > 11^x$. Решение: ООН $x \geq -6$. Таким образом, $\sqrt{x+6} > x$. При $x < 0$ неравенство верно на всей ООН. При $x > 0$ возведем обе части неравенства в квадрат, получим: $x+6 > x^2$; $x^2 - x - 6 < 0$, $-2 < x < 3$. Объединяя оба ответа, получаем $-6 \leq x < 3$. Ответ: $-6 \leq x < 3$.
- 2) $0,3^{\sqrt{30-x}} > 0,3^x$. Решение: ООН $x \leq 30$. По свойству 9 (§11) $\sqrt{30-x} < x$. При $x < 0$ неравенство не выполнено, при $x \geq 0$ можно возвести обе части неравенства в квадрат, получим $30-x < x^2$. Откуда $6 < x \leq 30$ (с учетом ООН) или $x < -5$ (не удовлетворяет условию $x \geq 0$). Ответ: $6 < x \leq 30$.

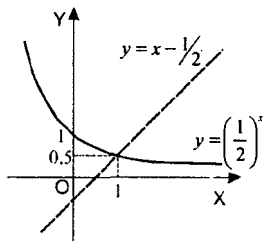


Рис. 40

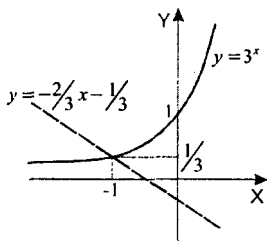


Рис. 41

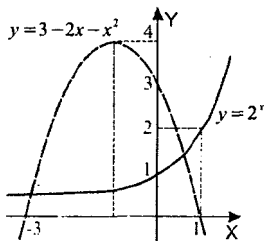


Рис. 42

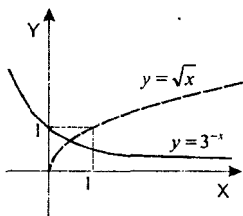


Рис. 43

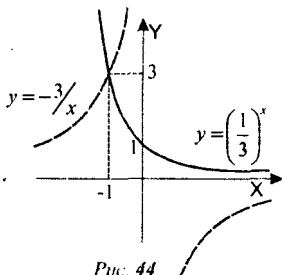


Рис. 44

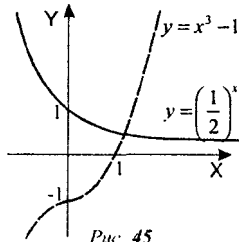


Рис. 45

239. 1) Указание: сделайте замену $u = \left(\frac{2}{5}\right)^x$.

2) Указание: преобразуйте неравенство к виду $0,2^{-2+4x-x(3-x)} > 1$.

3) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$. Решение: О.О.Н. $4^x \neq 3^x$, т.е. $x \neq 0$. Преобразуем неравен-

ство: $\frac{4^x - 4 \cdot 4^x + 4 \cdot 3^x}{4^x - 3^x} < 0$. Разделим числитель и знаменатель на $3^x \neq 0$,

получим $\frac{-3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + 4}{\left(\frac{4}{3}\right)^x - 1} < 0$. Сделаем замену $\left(\frac{4}{3}\right)^x = u > 0$, тогда $\frac{4-3u}{u-1} < 0$,

т.е. $u > \frac{4}{3}$ или $0 < u < 1$. Откуда находим $x > 1$ или $x < 0$.

4) Указание: преобразуйте неравенство к виду $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3(x^2-1)-5}$.

§14. Системы показательных уравнений и неравенств

$$240. 1) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5^{x+y} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5^{x+y} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5^{x+2x-1} = 5^2 \end{cases}$$

Решение: из первого уравнения выразим y и подставим во второе уравнение системы, откуда $3x - 1 = 2$, т.е. $x = 1, y = 1$. Ответ: (1; 1).

$$2) \begin{cases} x - y = 2 \\ 3^{x^2+y} = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ 3^{x^2+y} = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ 3^{x^2+x-2} = 3^{-2} \end{cases}$$

Решение: из первого уравнения выразим y , подставим во второе, откуда $x^2 + x - 2 = -2$, т.е. $x_1 = 0, y_1 = -2$; $x_2 = -1, y_2 = -3$. Ответ: (-1; -3), (-2; 0).

$$3) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2^{x-y} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 2^{x-1+x} = 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow x - 1 + x = 3, \text{ т.е. } 2x = 4, x = 2, y = -1.$$

Ответ: (2; -1).

$$4) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3^{x-y} = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 3^{3-2y-y} = 3^4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 - 3y = 4, \text{ т.е. } y = \frac{1}{3}, x = 2\frac{1}{3}.$$

Ответ: $(2\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

$$241. 1) \begin{cases} 4^x \cdot 2^y = 32 \\ 3^{8x+1} = 3^{3y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x+y} = 2^5 \\ 3^{8x+1} = 3^{3y} \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 8x + 1 = 3y \end{cases}$$

Решая систему, получаем ответ (1; 3). Ответ: (1; 3).

$$2) \begin{cases} 3^{3x-2y} = 81 \\ 3^{6x} \cdot 3^y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} = 3^4 \\ 3^{6x+y} = 3^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x + y = 3 \end{cases}, \text{ т.е. } x = \frac{2}{3}, y = -1.$$

242. Указание: сложите уравнения системы.

243. 1) Указание: домножьте второе уравнение на 5 и сложите с первым.

2) Аналогично 3).

$$3) \begin{cases} 16^y - 16^x = 24, \\ 16^{x+y} = 256. \end{cases}$$

Решение: заменим $16^x = u, 16^y = v$, тогда $\begin{cases} v - u = 24 \\ uv = 265 \end{cases}$. Тогда по теореме Виета находим решения: (8; 32) и (-32; -8). Из первой пары решений получаем $x = \frac{3}{4}, y = \frac{5}{4}$, вторая пара решений не дает. Ответ: $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

4) Указание: сделайте замену переменных $3^x = u$ и $2^{x+y} = v$.

5) Указание: перемножьте уравнения системы, получится $15^{x+y} = 225$.

6) Указание: перемножьте уравнения системы, получится $6^{x+y} = 36$.

244. 1) Аналогично 2)

$$2) \begin{cases} 0,3^{10x^2 - 47x} = 0,3^{-10x - 7} \\ 3,7^{x^2} < 3,7^4 \end{cases} \quad \text{Решение: данная система равносильна системе:}$$

$$\begin{cases} 10x^2 - 47x = -10x - 7 \\ x^2 < 4 \end{cases} \quad \text{Из первого уравнения находим } x_1 = 3,5 \text{ и } x_2 = 0,2.$$

Первый корень не удовлетворяет неравенству, а второй – удовлетворяет.

Ответ: $x_2 = 0,2$.

245. 1) аналогично 2).

$$2) \begin{cases} (0,2^y)^x = 0,008 \\ 0,4^y = 0,4^{3,5-x} \\ 2^x \cdot 0,5^y < 1 \end{cases} \quad \text{Решение: данная система равносильна: } \begin{cases} xy = 3 \\ y = 3,5 - x \\ y - x > 0 \end{cases}$$

Решая систему, из первого и второго уравнения находим решения (2; 1,5) и (1,5; 2), из них неравенству удовлетворяет только второе. Ответ: (1,5; 2).

Упражнения к главе III

246–247. Указание: воспользуйтесь свойствами показательной функции.

249. В каком промежутке находятся значения функции при $x \in [-1; 2]$:

1) $y = 5^x$. Решение: по свойству показательной функции эта функция возрастает и принимает все свои значения между минимальным и максимальным. Минимальное значение $y(-1) = 0,2$, максимальное значение $y(2) = 25$. Ответ: $[0,2; 25]$.

2) Аналогично 1).

250. 1) $1,5^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$. Данное уравнение равносильно $\left(\frac{2}{3}\right)^{7-5x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$,

т.е. $7-5x = x+1$; $6x = 6$, $x = 1$. Ответ: $x = 1$.

2) $0,75^{2x-3} = \left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x}$. Данное уравнение равносильно $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-5}$,

т.е. $2x-3 = x-5$; $x = -2$. Ответ: $x = -2$.

3) $5^{x^2-5x-6} = 1$. Таким образом $x^2 - 5x - 6 = 0$. Отсюда $x = -1$ и $x = 6$.

Ответ: $x = -1$, $x = 6$.

4) Аналогично 3).

251. 1) $2^x + 2^{x-3} = 18$. Решение: $2^{x-3}(2^3 + 1) = 18$; $2^{x-3} = 2$. Отсюда $x-3 = 1$.

Ответ: $x = 4$.

2) Указание: данное уравнение равносильно $3^x(1+4\cdot 3) = 13$; $3^x = 1$.

3) Указание: данное уравнение равносильно $3^{x-1}(2\cdot 3^2 - 6 - 3) = 9$; $3^{x-1} = 1$.

4) Указание: уравнение равносильно $5^{x-1}(5^2 + 3 - 6\cdot 5) = -10$; $5^{x-1} = 5$.

252. 1) $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$. Решение: заменим $u = 5^x$, тогда $u^2 - u - 600 = 0$.

Отсюда $u = -24$ (посторонний корень) и $u = 25$. Т.е. $5^x = 25$, $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

2) Указание: замените $u = 3^x$, тогда $u^2 - u - 6 = 0$.

3) Указание: замените $u = 3^{x-1}$, тогда $3u + u^2 - 810 = 0$.

4) $4^x + 2^{x+1} - 80 = 0$. Решение: сделаем замену переменной $2^x = u > 0$,

тогда уравнение примет вид $u^2 + 2u - 80 = 0$. По теореме Виета его корни

$u_1 = -10$ (не удовлетворяет условию $u > 0$) и $u_2 = 8$, откуда $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

253. Аналогично задачам 228, 229.

254. Аналогично задаче 236.

Проверь себя!

1. Указание: $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^{-x}$, графики симметричны относительно оси OY .

2. Указание: 1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2} > \left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$, так как $\frac{1}{5} < 1$; 2) $5^{-0,2} > 5^{-1,2}$, так как $5 > 1$.

3. Указание: преобразуйте данное уравнение к виду: 1) $3^{x-1} = 3^{3(x-1)}$;

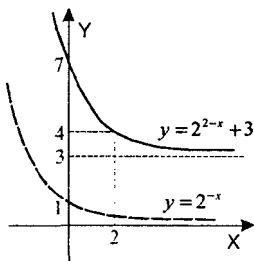


Рис. 46

2) $0,2^{x^2+4x-5} = 0,2^0$; 3) $3 \cdot 2^{x+1} = 12$; 4) сделайте замену $2^x = u$.

4. Указание: данное неравенство равносильно

1) $x-2 > 2$; 2) $x^2-2 \leq 2$.

255. Указание: покажите, что $y(n) = 2 \cdot y(n-1)$ для $n = 1, 2, 3, \dots$

256. Указание: воспользуйтесь формулой $P(n) = a \cdot (1 + p \cdot 100)^n$.

257. 3) См. рис. 46.

258. 1) Аналогично 2).

2) $16\sqrt{0,25^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$. Решение: О.О.У. $x \geq -1$. Преобразуем левую часть:

$$16\sqrt{0,25^{5-\frac{x}{4}}} = 2^4 \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^4 \sqrt{2^{-2\left(5-\frac{x}{4}\right)}} = 2^4 \cdot 2^{\frac{x}{4}-5} = 2^{\frac{x}{4}-1}. \text{ Тогда } 2^{\frac{x}{4}-1} = 2^{\sqrt{x+1}},$$

т.е. $x-4 = 4\sqrt{x+1}$. При $x \geq 4$ левая часть неотрицательна, возведем в квадрат, получим $x^2 - 8x + 16 = 16x + 16$, откуда $x = 0$ (не удовлетворяет условию $x \geq 4$) и $x = 24$. Ответ: $x = 24$.

259. 1)–3) Аналогично 4)

4) $5 \cdot 4^{x-1} - 16^x + 0,25 \cdot 2^{2x+2} + 7 = 0$. Решение: преобразуем левую часть уравнения: $5 \cdot 4^{x-1} - 16^x + 0,25 \cdot 2^{2x+2} + 7 = \frac{5}{4} \cdot 4^x - 4^{2x} + 4^x + 7$ и сделаем замену переменной $4^x = u > 0$. Тогда $-u^2 + 2,25u + 7 = 0$, откуда $u_1 = 4$ и $u_2 = -1,75$ (не удовлетворяет условию $u > 0$). Т.е. $4^x = 4$, $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

260. 1) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x$. Решение: разделим обе части уравнения на

$$5^x \neq 0, \text{ получим: } 16 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x = 5 + 3, \quad 20 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x = 8, \quad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{2}{5}, \text{ т.е.}$$

$x = 1$. Ответ: $x = 1$.

2)–4) Аналогично 1).

261. 1) Аналогично 2)

2) $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} < 10^{-3}(10^{3-x})^2$. Решение: преобразуем неравенство $10^{x^2} < 10^{3-2x}$, тогда $x^2 < 3-2x$, откуда $-3 < x < 1$. Ответ: $-3 < x < 1$.

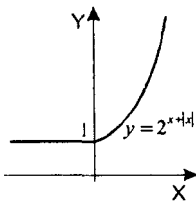


Рис. 47

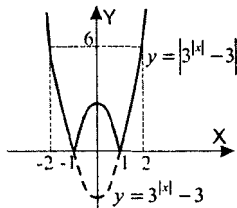


Рис. 48

3) Указание: сделайте замену переменной $2^x = u > 0$, тогда

$$\frac{u(u^2 - 2u + 8)}{2} < u^3.$$

4) Указание: сделайте замену переменной $3^x = u > 0$, тогда $\frac{1}{u+5} \leq \frac{1}{3u-1}$.

262. Аналогично задаче 243.

263. 1) См. рис. 47. Указание: $y = \begin{cases} 2^{2x}, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$.

2) См. рис. 48.

264. Аналогично задаче 226.

265. Решить неравенство:

1)–3) Аналогично 4).

4) $5^{|x+4|} < 25^{|x|}$. Решение: преобразуем неравенство: $5^{|x+4|} < 5^{2|x|}$, тогда $|x+4| < 2|x|$. Т.к. обе части неравенства неотрицательны, можно возвести

в квадрат. Получим $(x+4)^2 < 4x^2$, откуда $x < -\frac{4}{3}$ или $x > 4$.

Ответ: $x < -\frac{4}{3}$, $x > 4$.

IV глава

Логарифмическая функция

§15. Логарифмы

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0.$$

266. Указание: $\frac{1}{243} = 3^{-5}$; $9\sqrt{3} = 3^{2\frac{1}{4}}$.

267. 1) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$;

2) $\log_2 64 = \log_2 2^5 = 5$;

3) $\log_2 2 = \log_2 2^1 = 1$;

4) $\log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$.

268. 1) $\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$;

2) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$;

3) $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$;

4) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}$.

269. 1) $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$;

2) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$;

3) $\log_3 3 = \log_3 3^1 = 1$;

4) $\log_3 1 = \log_3 3^0 = 0$.

270. 1) $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$;

2) $\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$;

3) $\log_3 \sqrt[4]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$;

4) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}$.

271. 1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5$;

2) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$;

3) $\log_{0,5} 0,125 = \log_{0,5} (0,5)^3 = 3$;

4) $\log_{0,5} \frac{1}{2} = \log_{0,5} 0,5^1 = 1$;

5) $\log_{0,5} 1 = \log_{0,5} 0,5^0 = 0$;

6) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$.

272. 1) $\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$;

2) $\log_6 216 = \log_6 6^3 = 3$;

$$3) \log_4 \frac{1}{16} = \log_4 4^{-2} = -2;$$

$$4) \log_5 \frac{1}{125} = \log_5 5^{-3} = -3.$$

$$273. 1) \log_{\frac{1}{5}} 125 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = -3; \quad 2) \log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = -3;$$

$$3) \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 3;$$

$$4) \log_{\frac{1}{6}} 36 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = -2.$$

274. 1) $3^{\log_3 18}$. Решение: по основному логарифмическому тождеству $3^{\log_3 18} = 18$. Ответ: 18.

$$2) 5^{\log_5 16} = 16;$$

$$3) 10^{\log_{10} 2} = 2;$$

$$4) \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6} = 6.$$

275. 1) $3^{5 \log_3 2}$. Решение: $3^{5 \log_3 2} = (3^{\log_3 2})^5 = 2^5 = 32$. Ответ: 32.

$$2) \left(\frac{1}{2}\right)^{6 \log_{\frac{1}{2}} 2} = 2^6 = 64;$$

$$3) 0,3^{2 \log_{0,3} 6} = 6^2 = 36;$$

$$4) 7^{\frac{1}{2} \log_7 9} = 9^{\frac{1}{2}} = 3.$$

276. 1) $8^{\log_2 5} = 2^{3 \log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125;$

$$2) 9^{\log_3 12} = 3^{2 \log_3 12} = (3^{\log_3 12})^2 = 12^2 = 144;$$

$$3) 16^{\log_4 7} = 4^{2 \log_4 7} = (4^{\log_4 7})^2 = 7^2 = 49;$$

$$4) 0,125^{\log_{0,5} 1} = 0,5^{3 \log_{0,5} 1} = (0,5^{\log_{0,5} 1})^3 = 1^3 = 1.$$

277. 1) $\log_6 x = 3$. Решение: по основному логарифмическому тождеству $x = 6^3$, $x = 216$. Ответ: $x = 216$.

2) $\log_5 x = 4$. Решение: $x = 5^4 = 125$. Ответ: $x = 125$.

3) $\log_2(5-x) = 3$. Решение: $5-x = 2^3 = 8$, $x = 5-8$. Ответ: $x = -3$.

4) $\log_3(x+2) = 3$. Решение: $x+2 = 3^3 = 9$, $x = 9-2$. Ответ: $x = 7$.

5) $\log_{\frac{1}{6}}(0,5+x) = -1$. Решение: $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = 0,5+x$, т.е. $x+0,5 = 6$. Ответ: $x = 5,5$.

278. 1) $\log_{\frac{1}{2}}(4-x)$. Решение: необходимо $4-x > 0$, т.е. $x < 4$. Ответ: $x < 4$.

2) $\log_{0,2}(7-x)$. Решение: необходимо $7-x > 0$, т.е. $x < 7$. Ответ: $x < 7$.

3) $\log_0 \frac{1}{1-2x}$. Решение: необходимо $\frac{1}{1-2x} > 0$, т.е. $1-2x > 0$. Ответ: $x < 0,5$

4) $\log \frac{5}{2x-1}$. Решение: необходимо $\frac{5}{2x-1} > 0$, т.е. $2x-1 > 0$. Ответ: $x > 0,5$

5) $\log_{\frac{1}{4}}(-x^2)$. Решение: необходимо $-x^2 > 0$, т.е. $x^2 < 0$, что не возможно ни при каком значении x . Ответ: решений нет.

6) $\log_{0,7}(-2x^3)$. Решение: $-2x^3 > 0$; $x^3 < 0$, т.е. $x < 0$. Ответ: $x < 0$.

$$279. 1) \log_2 \sqrt[4]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}; \quad 2) \log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}} = \log_3 3^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2};$$

$$3) \log_{0,5} \frac{1}{\sqrt{32}} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}; \quad 4) \log_7 \frac{\sqrt[3]{7}}{49} = \log_7 \left(7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{-2} \right) = \frac{1}{3} - 2 = -1\frac{2}{3}$$

$$280. 1) 9^{2\log_3 5} = 3^{4\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5} \right)^4 = 5^4 = 625;$$

$$2) \left(\frac{1}{9} \right)^{\frac{1}{2}\log_3 4} = 3^{-2 \cdot \frac{1}{2}\log_3 4} = \left(3^{\log_3 4} \right)^{-1} = 4^{-1} = \frac{1}{4};$$

$$3) \left(\frac{1}{4} \right)^{-5\log_2 3} = 2^{-2 \cdot (-5\log_2 3)} = \left(2^{\log_2 3} \right)^{10} = 3^{10} = 59049;$$

$$4) 27^{-4\log_3 5} = \left(\frac{1}{3} \right)^{-3 \cdot (-4\log_3 5)} = \left(\frac{1}{3}^{\log_3 5} \right)^{12} = 5^{12};$$

$$5) 10^{1-\log_{10} 5} = 1000 \cdot 10^{-\log_{10} 5} = 1000 \cdot 5^{-1} = 200;$$

$$6) \left(\frac{1}{7} \right)^{1+2\log_7 3} = \frac{1}{7} \cdot \left(\left(\frac{1}{7} \right)^{\log_7 3} \right)^2 = \frac{1}{7} \cdot 3^2 = \frac{9}{7}.$$

$$281. 1) \log_2 \log_3 81 = \log_2 \log_3 3^4 = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2;$$

$$2) \log_3 \log_2 8 = \log_3 \log_2 2^3 = \log_3 3 = 1;$$

$$3) 2\log_{27} \log_{10} 1000 = 2\log_{27} \log_{10} 10^3 = 2\log_{27} 3 = 2\log_{27} 27^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$4) \frac{1}{3} \log_9 \log_2 8 = \frac{1}{3} \log_9 \log_2 2^3 = \frac{1}{3} \log_9 3 = \frac{1}{3} \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6};$$

$$5) 3\log_2 \log_4 16 = 3\log_2 \log_4 4^2 = 3\log_2 2 = 3.$$

282. 1) $\log_x 27 = 3$. Решение: О.О.У. $x > 0, x \neq 1$. По основному логарифмическому тождеству имеем: $x^3 = 27$, $x = 3$. Ответ: $x = 3$.

2) $\log_x \frac{1}{7} = -1$. Решение: О.О.У. $x > 0, x \neq 1$. $x^{-1} = \frac{1}{7}$, $x = 7$. Ответ: $x = 7$.

3) $\log_x \sqrt{5} = -4$. Решение: О.О.У. $x > 0, x \neq 1$. $x^{-4} = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = \left(5^{-4 \cdot \frac{1}{2}} \right)^{-4}$.

Т.к. функция $y = x^{-4}$ взаимно однозначная, то $x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$. Ответ: $x = \frac{1}{25}$.

283. 1) $\log_6(49 - x^2)$. Решение: необходимо $49 - x^2 > 0$, т.е. $x^2 < 49$. Т.е.

$-7 < x < 7$. Ответ: $-7 < x < 7$.

2) $\log_7(x^2 + x - 6)$. Решение: необходимо $x^2 + x - 6 > 0$. Т.е. $x < -3$ и $x > 2$. Ответ: $x < -3$, $x > 2$.

3) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 + 2x + 7)$. Решение: необходимо $x^2 + 2x + 7 > 0$, что верно при любом x .

284. 1) $\log_3(1 - x^3)$. Решение: необходимо $1 - x^3 > 0$, т.е. $x^3 < 1$. Т.к. $y = x^3$ взаимно однозначная возрастающая функция, то $x < 1$. Ответ: $x < 1$.

2) Аналогично 1).

3) $\log_{\frac{1}{4}}(x^3 + x^2 - 6x)$. Решение: необходимо $x^3 + x^2 - 6x > 0$, то есть:

$x(x^2 + x - 6) = x(x+3)(x-2) > 0$. Решая данное неравенство методом интервалов, находим $x > 2$ или $-3 < x < 0$. Ответ: $x > 2$, $-3 < x < 0$.

4) Аналогично 3).

285. 1) $2^x = 5$. Решение: по определению $x = \log_2 5$. Ответ: $x = \log_2 5$.

2) $1,2^x = 4$. Решение: по определению $x = \log_{1,2} 4$. Ответ: $x = \log_{1,2} 4$.

3) $4^{2x+3} = 5$. Решение: $2x+3 = \log_4 5$; $x = \frac{\log_4 5 - 3}{2}$. Ответ: $x = \frac{\log_4 5 - 3}{2}$.

4) $7^{1-2x} = 2$. Решение: $1-2x = \log_7 2$; $x = \frac{1 - \log_7 2}{2}$. Ответ: $x = \frac{1 - \log_7 2}{2}$.

286. 1) $7^{2x} + 7^x - 12 = 0$. Решение: заменим $u = 7^x$, тогда $u^2 + u - 12 = 0$. Откуда $u = -4$ и $u = 3$. Т.е. $-4 = 7^x$ (решений нет) и $3 = 7^x$. Ответ: $x = \log_7 3$.

2) Указание: сделайте замену $u = 3^x$, тогда $u^2 - u - 12 = 0$.

3) $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$. Решение: введем новое неизвестное $y = 8^x$. Тогда исходное уравнение примет вид: $8y - \frac{1}{8}y^2 = 30$; $y^2 - 64y + 240 = 0$, откуда $y_1 = 60$, $y_2 = 4$. Т.е. $8^x = 60$ или $8^x = 4$. Тогда $x = \log_8 60$ или $x = \log_8 4 = \frac{2}{3}$. Ответ: $x = \log_8 60$, $x = \frac{2}{3}$.

4) Указание: сделайте замену $u = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, тогда $u^2 - 5u + 6 = 0$.

287. 1) $(3^x + 2^x)(3^x + 3 \cdot 2^x) = 8 \cdot 6^x$. Решение: разделим обе части уравнения

$$\text{на } 6^x \neq 0. \text{ Получим: } \frac{(3^x + 2^x)}{3^x} \cdot \frac{(3^x + 3 \cdot 2^x)}{2^x} = 8, \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x\right) \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x + 3\right) = 8.$$

Введем новое неизвестное $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$, тогда уравнение примет вид:

$$(1 + y) \left(3 + \frac{1}{y}\right) = 8; \quad 4 + 3y + \frac{1}{y} = 8. \text{ Домножим уравнение на } y \neq 0, \text{ полу-}$$

чим $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{3}$. Т.е. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$ или $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1}{3}$,

тогда $x = 0$ или $x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}$. Ответ: $x = 0, x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}$.

2) Указание: раскройте скобки: $6 \cdot 15^x + 5 \cdot 3^{2x} - 6 \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 15^x = 8 \cdot 15^x$;

$$5 \cdot 3^{2x} - 6 \cdot 5^{2x} = 7 \cdot 15^x \text{ и разделите уравнение на } 3^{2x}: 5 - 6 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} = 7 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x.$$

Далее сделайте замену $u = \left(\frac{5}{3}\right)^x$, тогда $6u^2 + 7u - 5 = 0$.

288. 1) $\log_x(2x-1)$. Решение: необходимо $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 2x-1 > 0 \end{cases}$, откуда: $x > \frac{1}{2}$,

$x \neq 1$. Ответ: $\frac{1}{2} < x < 1, x > 1$.

2) $\log_{x-1}(x+1)$. Решение: необходимо $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1, \text{ откуда: } x > 1, x \neq 2. \\ x+1 > 0 \end{cases}$

Ответ: $x > 1, x \neq 2$.

289. Решение: введем новое неизвестное $y = 3^x > 0$, тогда уравнение примет

вид $y^2 + a(1-a)y - a^3 = 0$. По теореме Виета корни этого уравнения

$y_1 = a^2$ и $y_2 = -a$. При $a < 0$ $y_{1,2} > 0$, следовательно $3^x = a^2$ и $3^x = -a$,

т.е. $x = \log_3 a^2, x = \log_3(-a)$. Заметим, что эти корни совпадают при

$a = -1$. При $a = 0$ $y_{1,2} = 0$, т.е. решений нет. При $a > 0$ $y_1 > 0$, а $y_2 < 0$,

т.е. $x = \log_3 a^2$. Ответ: при $a < 0, a \neq -1$ $x = \log_3 a^2, x = \log_3(-a)$; при

$a = 0$ решений нет; при $a > 0$ и $a = -1$ $x = \log_3 a^2$.

§16. Свойства логарифмов

Свойства: ($a > 0, a \neq 1; b > 0, c > 0$)

$$1^\circ. \log_a b + \log_a c = \log_a bc; \quad 2^\circ. \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c};$$

$$3^\circ. \log_a b^p = p \log_a b; \quad 4^\circ. \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b.$$

$$290. 1) \log_{10} 5 + \log_{10} 2 = \log_{10} 10 = 1; \quad 2) \log_{10} 8 + \log_{10} 125 = \log_{10} 1000 = 3;$$

$$3) \log_{12} 2 + \log_{12} 72 = \log_{12} 144 = 2; \quad 4) \log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2} = \log_3 9 = 2.$$

$$291. 1) \log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16} = \log_2 \left(15 : \frac{15}{16} \right) = \log_2 16 = 4;$$

$$2) \log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 (75 : 3) = \log_5 25 = 2;$$

$$3) \log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2 = \log_{\frac{1}{3}} (54 : 2) = \log_{\frac{1}{3}} 27 = -3;$$

$$4) \log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32 = \log_8 \left(\frac{1}{16} : 32 \right) = \log_8 \frac{1}{8^3} = -3.$$

$$292. 1) \log_{13} \sqrt[3]{169} = \log_{13} 13^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}; \quad 2) \log_{11} \sqrt[3]{121} = \log_{11} 11^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3};$$

$$3) \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^{-\frac{5}{4}} = -\frac{5}{4}; \quad 4) \log_2 \frac{1}{\sqrt[6]{128}} = \log_2 2^{-\frac{7}{6}} = -\frac{7}{6}.$$

$$293. 1) \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20 = \log_8 (12 : 15 \cdot 20) = \log_8 16 = \log_8 8^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3};$$

$$2) \log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10 = \log_9 (15 \cdot 18 : 10) = \log_9 27 = \log_9 9^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2};$$

$$3) \frac{1}{2} \log_7 36 - \log_7 14 - 3 \log_7 \sqrt[3]{21} = \log_7 \left(36^{\frac{1}{2}} : 14 : (\sqrt[3]{21})^3 \right) =$$

$$= \log_7 \frac{6}{14 \cdot 21} = \log_7 7^{-2} = -2;$$

$$4) 2 \log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 400 + 3 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45} = \log_{\frac{1}{3}} 6^2 - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{400} + \log_{\frac{1}{3}} (\sqrt[3]{45})^3 =$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 36 - \log_{\frac{1}{3}} 20 + \log_{\frac{1}{3}} 45 = \log_{\frac{1}{3}} (36 : 20 \cdot 45) = \log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^4 = -4.$$

$$294. 1) \frac{\log_3 8}{\log_3 16} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^4} = \frac{3 \log_3 2}{4 \log_3 2} = \frac{3}{4};$$

$$2) \frac{\log_5 27}{\log_5 9} = \frac{\log_5 3^3}{\log_5 3^2} = \frac{3 \log_5 3}{2 \log_5 3} = \frac{3}{2};$$

$$3) \frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9} = \frac{\log_5 (36:12)}{\log_5 3^2} = \frac{\log_5 3}{2 \log_5 3} = \frac{1}{2};$$

$$4) \frac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30} = \frac{\log_7 2^3}{\log_7 (15:30)} = \frac{3 \log_7 2}{\log_7 2^{-1}} = -3.$$

295. Вычислить $\log_a x$, если $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$.

$$1) x = a^3 b^2 \sqrt{c}. \quad \log_a x = \log_a a^3 b^2 \sqrt{c} = \log_a a^3 + \log_a b^2 + \log_a \sqrt{c} = 3 + 6 - 1 = 8.$$

$$2) x = \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}. \quad \log_a x = \log_a \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3} = \log_a a^4 + \log_a b^{\frac{1}{3}} - \log_a c^3 = 4 + 1 + 6 = 11.$$

$$296. 1) \frac{\log_2 24 - \frac{1}{2} \log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3} \log_3 72} = \frac{\log_2 \frac{24}{\sqrt{72}}}{\log_3 \frac{18}{\sqrt[3]{72}}} = \frac{\log_2 \frac{24}{6\sqrt{2}}}{\log_3 \frac{18}{2\sqrt[3]{9}}} = \frac{\log_2 2\sqrt{2}}{\log_3 3\sqrt{3}} = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8};$$

$$2) \frac{\log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2} \log_6 150} = \frac{\log_7 (14 : \sqrt[3]{56})}{\log_6 (30 : \sqrt{150})} = \frac{\log_7 7^{\frac{2}{3}}}{\log_6 6^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{4}{3};$$

$$3) \frac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3 \log_2 2} = \frac{\log_2 (4 \cdot \sqrt{10})}{\log_2 (20 \cdot 8)} = \frac{\log_2 (4 \cdot \sqrt{10})}{\log_2 (4 \cdot \sqrt{10})^2} = \frac{\log_2 (4 \cdot \sqrt{10})}{2 \log_2 (4 \cdot \sqrt{10})} = \frac{1}{2};$$

$$4) \frac{3 \log_7 2 - \frac{1}{2} \log_7 64}{4 \log_5 2 + \frac{1}{3} \log_5 27} = \frac{3 \log_7 2 - 3 \log_7 2}{4 \log_5 2 + \frac{1}{3} \log_5 27} = \frac{0}{4 \log_5 2 + \frac{1}{3} \log_5 27} = 0.$$

297. Найти x по данному его логарифму ($a > 0$, $b > 0$):

1) $\log_3 x = 4 \log_3 a + 7 \log_3 b$. Решение: $\log_3 x = 4 \log_3 a + 7 \log_3 b = \log_3 a^4 b^7$, откуда $x = a^4 b^7$. Ответ: $x = a^4 b^7$.

2) Указание: $\log_5 x = \log_5 \frac{a^2}{b^3}$.

3) Указание: $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b}}$

4) Указание: $\log_{\frac{2}{3}} x = \log_2 \sqrt[4]{a^7 \sqrt{b^4}}$.

298. 1) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 8^{\log_2 3} = 6^{2\log_6 5} + 10:10^{\log_{10} 2} - 2^{3\log_2 3} = 25 + 5 - 27 = 3$

2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_5 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2} = \left(3:9^{\log_9 4} + 125^{\frac{2}{3}\log_5 8}\right) \cdot 7^{2\log_7 2} = 4\left(\frac{3}{4} + \sqrt[3]{8^2}\right) = 19$

3) $16^{1+\log_4 5} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_4 5} = 16 \cdot 4^{2\log_4 5} + 2^{\log_2 3} \cdot 8^{\frac{2}{3}\log_4 5} = 16 \cdot 25 + 3 \cdot 25 = 475$

4) $72 \cdot \left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_5 4}\right) = 72 \cdot \left(49^{\log_7 \frac{\sqrt{9}}{6}} + 5^{-2\log_5 4}\right) =$
 $= 72 \cdot \left(\left(7^{\log_7 \frac{1}{2}}\right)^2 + \left(5^{\log_5 4}\right)^{-2}\right) = 72 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = \frac{72 \cdot 5}{16} = 22,5$

299. $a^{\log_a p^b} = \left(a^{p \log_a p^b}\right)^{\frac{1}{p}} = b^{\frac{1}{p}} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{p} \log_a b}$. Т.е. $\log_a p^b = \frac{1}{p} \log_a b$, ч.т.д.

1) $\log_{36} 2 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{6}} 3 = \frac{1}{2} \log_6 2 + \frac{1}{2} \log_6 3 = \log_6 \sqrt{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$;

2) $2 \log_{25} 30 + \log_{0,2} 6 = \log_5 30 - \log_5 6 = \log_5 30 : 6 = 1$.

300. Выразить через a и b :

1) $\log_{\sqrt{3}} 50$, если $\log_3 15 = a$, $\log_3 10 = b$. Решение: $\log_{\sqrt{3}} 50 = 2 \log_3 50 =$
 $= 2(\log_3 10 + (\log_3 5 + \log_3 3) - 1) = 2(\log_3 10 + \log_3 15 - 1) = 2(b + a - 1)$.

2) Указание: $\log_4 1250 = \frac{1}{2} \log_2 (2 \cdot 5^4)$.

§17. Десятичные и натуральные логарифмы

Основные понятия

Формула перехода: $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$, где $a, b, c > 0$; $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$.

Частные случаи: $\log_a b = \frac{\ln a}{\ln b}$; $\log_a b = \frac{\lg a}{\lg b}$; $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

303. 1) $\log_7 25 = \frac{\lg 25}{\lg 7}$;

2) $\log_5 8 = \frac{\lg 8}{\lg 5}$;

3) $\log_9 0,75 = \frac{\lg 0,75}{\lg 9}$;

4) $\log_{0,75} 1,13 = \frac{\lg 1,13}{\lg 0,75}$.

304. Указание: воспользуйтесь формулой перехода, аналогично задаче 303.

305. Указание: воспользуйтесь формулой перехода, в которой $c = 7$.

306. 1) Указание: $\frac{\lg 625}{\lg 25} = \log_{25} 625 = 2$.

2) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4 \cdot \log_2 3) = -\frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \log_2 3 \right) = -\frac{1}{2} \log_2 2 = -\frac{1}{2}$.

307. Решить уравнение:

1) $\log_5 x = 2 \log_5 3 + 4 \log_{25} 2$. Решение: О.О.У. $x > 0$.

$2 \log_5 3 + 4 \log_{25} 2 = \log_5 9 + 2 \log_5 2 = \log_5 36$. Т.е. $\log_5 x = \log_5 36$, откуда $x = 36$. Ответ: $x = 36$.

2) $\log_2 x - 2 \log_{\frac{1}{2}} x = 9$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Преобразуем уравнение:

$\log_2 x - 2 \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 x + 2 \log_2 x = \log_2 x^3$; $9 = \log_2 2^9 = \log_2 512$. Т.е.

$\log_2 x^3 = \log_2 512$, откуда $x^3 = 512$, $x = 8$. Ответ: $x = 8$.

3) Аналогично 1).

4)–6) Аналогично 2).

308. Указание: $\log_{49} 28 = \frac{1}{2} \log_7 (2^2 \cdot 7) = \log_7 2 + \frac{1}{2} \log_7 7$.

309. Указание: $\log_{15} 30 = \frac{\lg 15}{\lg 30} = \frac{\lg 3 + \lg 5}{\lg 3 + \lg 10}$.

310. Указание: $\log_{24} 72 = \frac{\log_6 24}{\log_6 72} = \frac{\log_6 6 + \log_6 2^2}{\log_6 6^2 + \log_6 2}$.

311. Указание: $\log_{36} 9 = \log_{36} \frac{36}{4} = \log_{36} 36 - \log_{36} 8^{\frac{2}{3}}$.

312. 1) $\frac{\log_3 216}{\log_3 3} - \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} = \log_3 216 \cdot \log_3 8 - \log_3 24 \cdot \log_3 72 =$
 $= \log_3 (3^3 \cdot 2^3) \cdot \log_3 2^3 - \log_3 (2^3 \cdot 3) \cdot \log_3 (2^3 \cdot 3^2) =$
 $= (3 + 3 \log_3 2) \cdot 3 \log_3 2 - (3 \log_3 2 + 1)(3 \log_3 2 + 2) = -2$.

2) Аналогично 1).

313. 1) $\log_2^2 x - 9 \log_8 x = 4$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Заменим $u = \log_2 x$, тогда

$u^2 - 3u - 4 = 0$, т.е. $u_1 = -1$, $u_2 = 4$. Откуда $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 16$.

2) Указание: замените $u = \log_4 x$, тогда $8u^2 + 3u - 1 = 0$.

3) Указание: замените $u = \log_3 x$, тогда $u^2 + \frac{5}{2}u - 1,5 = 0$.

4) $\log_3^2 x - 15 \log_{27} x + 6 = 0$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Заменим $u = \log_3 x$, тогда $u^2 - 5u + 6 = 0$, т.е. $u_1 = 2$, $u_2 = 3$. Откуда $x = 9$ и $x = 27$.

314. 1) $\frac{\log_5 2}{\log_5 6} + \frac{\log_4 3}{\log_4 6} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$.

2) Аналогично 1).

3) $\frac{2 \log_2 3}{\log_4 9} = \frac{2 \log_2 3}{2 \cdot 0,5 \cdot \log_2 3} = 2$.

315. Пусть x – первоначальное количество жителей, y – количество жителей через n лет. Тогда $y = (1,08)^n \cdot x$, откуда $2x = (1,08)^n \cdot x$, т.е. $2 = (1,08)^n$, значит $n = \log_{1,08} 2 \approx 9,006$. Ответ: 9 лет.

316. Аналогично задаче 315.

§18. Логарифмическая функция, ее свойства и график

Основные свойства:

1. Функция $y = \log_a x$ – взаимно однозначная;
2. Область определения $x > 0$;
3. Множество значений – \mathbf{R} .
4. Функция $y = \log_a x$ возрастает если $a > 1$, убывает если $0 < a < 1$.
5. Функция $y = \log_a x$ имеет корень $x = 1$.
6. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) взаимно обратны.

318. 1) $\log_3 \frac{6}{5}$ и $\log_3 \frac{5}{6}$. Решение: т.к. $3 > 1$, то функция $y = \log_3 x$ возрастает,

следовательно $\log_3 \frac{6}{5} > \log_3 \frac{5}{6}$.

2)–4) Аналогично 1).

319–320. Указание: воспользуйтесь свойством монотонности логарифмической функции.

321. 4) Указание: $e \approx 2,71$.

322–323. См. рис. 49.

324. См. §18 учебника.

325. 1), 4) Аналогично 3).

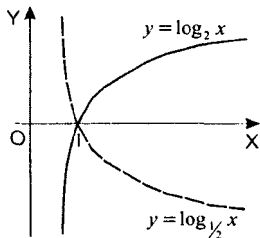


Рис. 49

2) $\log_{\frac{1}{5}} x \leq \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$. Решение: О.О.Н. $x > 0$. Так как $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ убывающая

функция, то неравенство равносильно неравенству $x \geq \frac{1}{8}$. Ответ: $x \geq \frac{1}{8}$.

3) $\lg x < \lg 4$. Решение: О.О.Н. $x > 0$. Так как $y = \lg x$ возрастающая функция, то неравенство равносильно неравенству $x < 4$, с учетом области определения $0 < x < 4$. Ответ: $0 < x < 4$.

326. Аналогично задаче 325.

327. 1) $\log_5(5x-1) = 2$. Решение: $2 = \log_5 5^2 = \log_5 25$, т.е. $\log_5(5x-1) = \log_5 25$, откуда $5x-1 = 25$, $x = 4,8$. Ответ: $x = 4,8$.

2)–6) Аналогично 1).

328. 1)–3) Аналогично 4).

4) $y = \log_{\sqrt{2}}(4-x^2)$. Решение: так как логарифмическая функция определена только при положительных значениях аргумента, необходимо $4-x^2 > 0$, откуда $-2 < x < 2$. Ответ: $-2 < x < 2$.

329. Докажите, что функция $y = \log_2(x^2-1)$ возрастает на промежутке $x > 1$.

Решение: данная функция определена при $x > 1$ и справедливо тождество: $\log_2(x^2-1) = \log_2(x+1) + \log_2(x-1)$. Ф-ции $y = \log_2(x+1)$ и $y = \log_2(x-1)$ возрастают, значит и исходная функция возрастает, как сумма двух возрастающих функций.

330. 1) $\frac{1}{2} + \lg 3 + \lg 19 - \lg 2$. Решение: сравним числа $\frac{1}{2} + \lg 3 + \lg 2 = \lg 6\sqrt{10}$ и $\lg 19$. Так как $6\sqrt{10} < 19$, то первое число меньше.

2) Указание: сравните числа $\sqrt{5\sqrt{7}}$ и $\frac{5+\sqrt{7}}{2}$.

3) Аналогично 1).

4) $\lg \lg \lg 50$ и $\lg^3 50$. Решение: $\lg 50 = 1 + \lg 5$, значит $1 < 1 + \lg 5 < 2$. Тогда $\lg \lg \lg 50 < \lg \lg 2 < \lg 1 < 0$, а $\lg^3 50 > 1$, т.е. первое число меньше.

331. 1) $\log_x(x^2-3x-4)$. Решение: функция определена при $x^2-3x-4 > 0$, т.е. при $x < -1$ или $x > 4$. Ответ: $x < -1$, $x > 4$.

2)–4) Аналогично 1).

5) Аналогично 6).

6) $\log_3(3^{x-1}-9)$. Решение: данная функция определена при $3^{x-1}-9 > 0$ т.е. $3^{x-1} > 3^2$, откуда $x > 3$. Ответ: $x > 3$.

332. 1) Указание: график получается из графика функции $y = \log_3 x$ сдвигом на одну единицу вправо.

2) Указание: график получается из графика функции $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ сдвигом на одну единицу влево.

3) Указание: график получается из графика функции $y = \log_3 x$ сдвигом на одну единицу вверх.

4) Указание: график получается из графика функции $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ сдвигом на одну единицу вниз.

5) Указание: график получается из графика функции $y = \log_3 x$ сдвигом на одну единицу вправо и на одну единицу вверх.

333. 1) См. рис. 50; 2) См. Рис. 51; 3) См. рис 52; 4) См. рис 53.

334. 1) См. рис. 54; 2) См. рис. 55.

3) См. рис 56; 4) См. рис 57.

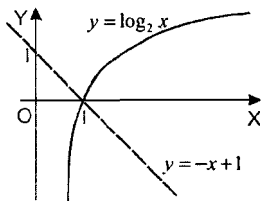


Рис. 50

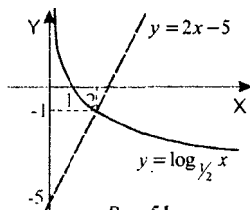


Рис. 51

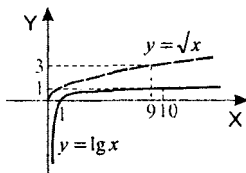


Рис. 52

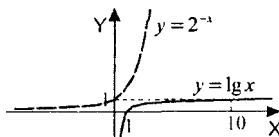


Рис. 53

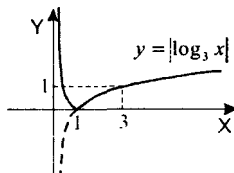


Рис. 54

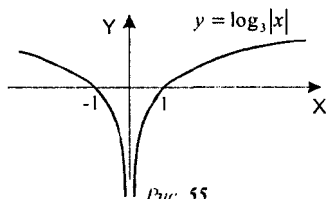


Рис. 55

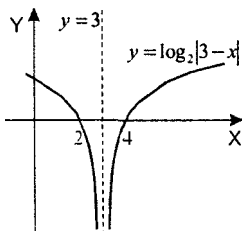


Рис. 56

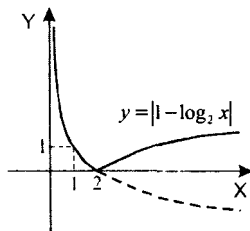


Рис. 57

335. 1) Указание: решите систему неравенств:
$$\begin{cases} |3-x| > 0 \\ |x^3 - 8| > 0. \end{cases}$$
- 2) Указание: решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} > 0 \\ 1-8x^3 > 0. \end{cases}$$

§19. Логарифмические уравнения

336. 1) второе уравнение следует из первого;
 2) уравнения равносильны;
 3) второе уравнение следует из первого;
 4) $\log_8 x + \log_8(x-2) = 1$ и $\log_8 x(x-2) = 1$.

Решение: найдем корни второго уравнения, оно равносильно уравнению $x(x-2) = 8$, откуда $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. Второй корень не удовлетворяет области определения первого уравнения, поэтому второе уравнение следует из первого. Ответ: второе уравнение следует из первого.

337. 1) $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3$. Решение: О.О.У. $x > 5$. Тогда $\log_2(x-5)(x+2) = \log_2 8$; $x^2 - 3x - 18 = 0$, откуда $x = -3$ (не удовлетворяет О.О.У.) и $x = 6$. Ответ: $x = 6$.
- 2) Указание: на своей О.О. уравнение равносильно $(x-2)(x+6) = 3^2$.
- 3) Указание: на своей О.О. уравнение равносильно $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 1$.
- 4) $\lg(x-1) + \lg(x+1) = 0$. Решение: О.О.У. $x > 1$. Тогда $\lg(x-1) + \lg(x+1) = \lg(x^2 - 1)$, т.е. $x^2 - 1 = 1$, откуда $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$ — не удовлетворяет области определения. Ответ: $x = \sqrt{2}$.

338. 1), 2) Аналогично 3).

- 3) $\log_3(x^3 - x) - \log_3 x = \log_3 3$. Решение: О.О.У.
$$\begin{cases} x^3 - x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$
, откуда $x > 1$.

Тогда $\log_3(x^3 - x) - \log_3 x = \log_3 \frac{x^3 - x}{x} = \log_3(x^2 - 1)$, т.е. $x^2 - 1 = 3$. Тогда $x = 2$ и $x = -2$ – не удовлетворяет области определения. Ответ: $x = 2$.

339. 1) $\frac{1}{2} \lg(x^2 + x - 5) = \lg 5x + \lg \frac{1}{5x}$. Решение: О.О.У. искать достаточно сложно, поэтому выполним преобразования, а потом сделаем проверку.

Тогда $\lg \sqrt{x^2 + x - 5} = \lg \left(5x \cdot \frac{1}{5x} \right) = \lg 1$, т.е. $\sqrt{x^2 + x - 5} = 1$, $x^2 + x - 5 = 1$, откуда $x = -3$ и $x = 2$. Проверка показывает, что только второй корень удовлетворяет уравнению. Ответ: $x = 2$.

2) Указание: уравнение равносильно $\lg \sqrt{x^2 - 4x - 1} = \lg 2$. Аналогично 1).

340. 1) $\log_3(5x + 3) = \log_3(7x + 5)$. Решение: О.О.У. $\begin{cases} 5x + 3 > 0 \\ 7x + 5 > 0 \end{cases}$, т.е. $x > -\frac{3}{5}$.

Тогда уравнение равносильно $5x + 3 = 7x + 5$, $x = -1$ (не удовлетворяет О.О.). Ответ: корней нет.

2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 1) = \log_{\frac{1}{2}}(6x + 8)$. Решение: О.О.У. $\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ 6x + 8 > 0 \end{cases}$, т.е. $x > \frac{1}{3}$.

В этом случае под знаком логарифма стоят положительные числа и уравнение равносильно уравнению $3x - 1 = 6x + 8$, откуда $x = -3$ – не удовлетворяет О.О. Ответ: корней нет.

341. 1) $\log_7(x - 1) \log_7 x = \log_7 x$. Решение: О.О.У. $x > 1$. Перенесем все в правую часть и преобразуем: $\log_7(x - 1) \log_7 x - \log_7 x = \log_7 x (\log_7(x - 1) - 1) = 0$, откуда $\log_7 x = 0$ или $\log_7(x - 1) = 1$. Тогда $x = 1$ (не удовлетворяет области определения) или $x = 8$. Ответ: $x = 8$.

2), 3) Аналогично 1).

4) $\log_{\sqrt{3}}(x - 2) \log_5 x = 2 \log_3(x - 2)$. Решение: О.О.У. $x > 2$. Перенесем все в правую часть и преобразуем, получим:

$\log_{\sqrt{3}}(x - 2) \log_5 x - 2 \log_3(x - 2) = \log_{\sqrt{3}}(x - 2) \log_5 x - \log_{\sqrt{3}}(x - 2) =$
 $= \log_{\sqrt{3}}(x - 2) (\log_5 x - 1)$. Тогда $\log_{\sqrt{3}}(x - 2) = 0$ или $\log_5 x = 1$. Из первого уравнения получаем $x = 3$, а из второго – $x = 5$. Ответ: $x = 3$, $x = 5$.

342. 1) Аналогично 2).

2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 \\ x^2 y - 2y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 xy = 2 \\ y(x^2 - 2) + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 9 \\ 9x - 18/x + 9 = 0 \end{cases}$

Решение: область определения системы $x > 0, y > 0$. Решая систему, получаем $x = -2$ (не удовлетворяет О.О.) и $x = 1$, тогда $y = 9$. Ответ: (1; 9).

343. 1) Аналогично 2).

2) $\log_4 x^2 = 3$. Решение: О.О.У. $x^2 > 0$, т.е. $x \neq 0$. Тогда $x^2 = 4^3$, откуда $x = \pm 8$. Ответ: $x = \pm 8$.

3) $\log_3 x^3 = 0$. Решение: О.О.У. $x^3 > 0$, т.е. $x > 0$. Тогда $x^3 = 1$, откуда $x = 1$. Ответ: $x = 1$.

4) Аналогично 3).

344. 1) $\log_4(x+2)(x+3) + \log_4 \frac{x-2}{x+3} = 2$. Решение: О.О.У. $\begin{cases} (x+2)(x+3) > 0 \\ \frac{x-2}{x+3} > 0 \end{cases}$,

т.е. $x > 2$ или $x < -3$. Уравнение равносильно $\log_4 \left((x+2)(x+3) \frac{x-2}{x+3} \right) = 2$,

откуда $(x+2)(x-2) = 4^2$, $x^2 - 4 = 16$, $x^2 = 20$, т.е. $x_1 = -2\sqrt{5}$ и $x_2 = 2\sqrt{5}$.

Оба корня удовлетворяют области определения. Ответ: $x = \pm 2\sqrt{5}$.

2)–4) аналогично 1).

345. 1) $2^{3\lg x} \cdot 5^{\lg x} = 1600$. Решение: область определения уравнения $x > 0$.

Тогда $2^{3\lg x} \cdot 5^{\lg x} = 8^{\lg x} \cdot 5^{\lg x} = 40^{\lg x} = 40^2$, т.е. $40^{\lg x} = 40^2$, откуда $\lg x = 2$, $x = 100$. Ответ: $x = 100$.

2) Аналогично 1).

3), 4) Указание: сделайте замену $\lg x = u$.

346. Ответ: 1), 2) равносильны.

347. 1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7 \\ \lg x + \lg y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \lg x = 12 \\ 2 \lg y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^6 \\ y = 10^{-1} \end{cases}$

Решение: О.О.С. $x > 0$, $y > 0$. Сложите уравнения системы, затем вычтите из второго уравнения первое. Ответ: $(10^6; 10^{-1})$.

2) $\begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{y} = 4 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 xy - \frac{3}{2} \log_2 y = 4 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 y = -2 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ x = 8 \end{cases}$

Решение: О.О.С. $x > 0$, $y > 0$. Прибавьте к первому уравнению $\log_2 y$

(получим $\log_2 xy$) и тут же отнимите (получим $-\frac{3}{2} \log_2 y$). Далее под-

ставьте $xy = 2$ в первое уравнение. Ответ: $\left(8; \frac{1}{4} \right)$.

348. Указание: область определения уравнений $x > 0, x \neq 1$. Тогда

$$\log_x a = \frac{1}{\log_a x}. \text{ В 1), 2) } a = 2, \text{ в 3) и 4) } a = 3. \text{ Сделайте замену } u = \log_a x.$$

349. 1) $\log_x 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = 2$. Решение: область определения уравнения $x > 0, x \neq 1$. Преобразуем уравнение:

$$\log_x 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = \frac{1}{2} \log_x 9 + 2 \log_x 4 = \log_x \sqrt{9} + \log_x 4^2 = \log_x (3 \cdot 16) = \log_x 48.$$

Т.е. $\log_x 48 = 2$, откуда $48 = x^2$, $x = \pm 4\sqrt{3}$ (отрицательный корень не удовлетворяет области определения уравнения). Ответ: $x = 4\sqrt{3}$.

2) Аналогично 1).

350. 1) Аналогично 2).

2) $\lg(2^x + x + 4) = x - x \lg 5$. Решение: перепишем уравнение в виде:

$$\lg(2^x + x + 4) + x \lg 5 = x, \text{ тогда: } \lg(2^x + x + 4) + x \lg 5 = \lg(2^x + x + 4) + \lg 5^x = \lg 5^x (2^x + x + 4); x = \lg 10^x, \text{ т.е. } \lg 5^x (2^x + x + 4) = \lg 10^x. \text{ Отсюда}$$

$5^x (2^x + x + 4) = 10^x$. Т.к. $5^x \neq 0$, то $2^x + x + 4 = 2^x$, и $x = -4$. Проверка показывает, что этот корень удовлетворяет исходному уравнению. Ответ: $x = -4$.

351. 1) Указание: сделайте замену $\lg(x+1) = u, \lg(x-1) = v$, тогда уравнение примет вид $u^2 = uv + 2v^2, (u-2v)(u+v) = 0$. Т.е. $\lg(x+1) = 2\lg(x-1)$ или $\lg(x+1) = -\lg(x-1)$. Далее аналогично задачам 338, 339. См. также 2).

2) $2 \log_5(4-x) \cdot \log_{2x}(4-x) = 3 \log_5(4-x) - \log_5 2x$. Решение: область оп-

$$\text{ределения уравнения: } \begin{cases} 4-x > 0 \\ 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \end{cases}, \text{ т.е. } 0 < x < 4, x \neq 0,5.$$

Преобразуем уравнение: $2 \log_5(4-x) \cdot \log_{2x}(4-x) = 2 \log_5(4-x) \cdot \frac{\log_5(4-x)}{\log_5 2x}$,

т.е. $2 \log_5(4-x) \cdot \frac{\log_5(4-x)}{\log_5 2x} = 3 \log_5(4-x) - \log_5 2x$. Домножим уравне-

ние на $\log_5 2x \neq 0$, получим: $2 \log_5^2(4-x) = 3 \log_5(4-x) \cdot \log_5 2x - \log_5^2 2x$.

Заменим $\log_5(4-x) = u, \log_5 2x = v$, тогда уравнение примет вид

$2u^2 = 3uv - v^2$, $(2u - v)(u - v) = 0$. Т.е. $2\log_5(4 - x) = \log_5 2x$ или $\log_5(4 - x) = \log_5 2x$. Из первого уравнения находим $(4 - x)^2 = 2x$, $x = 2$ и $x = 8$ (не удовлетворяет области определения). Из второго уравнения $4 - x = 2x$, $x = \frac{4}{3}$. Ответ: $x = 2$, $x = \frac{4}{3}$.

352. 1) Указание: $\log_x 25 = \frac{2}{\log_5 x}$. Замните $u = \log_5 x$. Аналогично 2).

2) $\sqrt{2\log_2^2 x + 3\log_2 x - 5} = \log_2 2x$. Решение: уравнение имеет смысл только при $x > 0$. Сделаем замену $\log_2 x = u$. Тогда $\sqrt{2u^2 + 3u - 5} = u + 1$. Подкоренное выражение неотрицательно при $u \geq 1$ или при $u \leq -2,5$. При $u \geq -1$ правая часть неотрицательна, возведем в квадрат. Получим $2u^3 + 3u - 5 = (u + 1)^2$, $u^2 + u - 6 = 0$, $u_1 = -3$ (не удовлетворяет условию $u \geq -1$) и $u_2 = 2$. Т.е. $\log_2 x = 2$, $x = 4$. Ответ: $x = 4$.

353. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $5\log_5 x + \log_a x - 4\log_{25} x = a$ имеет корни.

Решение: О.О.У. $x > 0$, кроме того, $a > 0, a \neq 1$. Преобразуем уравнение:

$5\log_5 x + \log_a x - 4\log_{25} x = 5\log_5 x + \frac{\log_5 x}{\log_5 a} - 2\log_5 x$. Заменим $\log_5 x = u$,

тогда уравнение примет вид: $5u + \frac{1}{\log_5 a}u - 2u = a$, $\left(3 + \frac{1}{\log_5 a}\right)u = a$.

Последнее уравнение имеет решения при $\log_5 a \neq -\frac{1}{3}$, т.е. при $a \neq \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$. В остальных случаях уравнение разрешимо относительно u , а значит исходное уравнение разрешимо относительно x , т.к. множество значений функции

$y = \log_5 x$ – вся вещественная прямая. Ответ: $a > 0, a \neq \frac{1}{\sqrt[3]{5}}, a \neq 1$.

§20. Логарифмические неравенства

354. Указание: 1) $3x - 2 > 0$; 2) $7 - 5x > 0$; 3) $x^2 - 2 > 0$; 4) $4 - x^2 > 0$.

355. 1)–5) Аналогично 6).

6) $\log_{\frac{2}{3}}(2 - 5x) < -2$. Решение: область определения неравенства $x < 0,4$.

Т.к. $\frac{2}{3} < 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $2 - 5x > \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$,

т.е. $5x < -0,25$, $x < -0,05$. Ответ: $x < -0,05$.

356. 1) Указание: $\lg 8 + 1 = \lg 80$;

2) Указание: $2 - \lg 4 = \lg 25$;

3) Указание: решите систему неравенств:
$$\begin{cases} x - 4 < 2 \\ x - 4 > 0. \end{cases}$$

4) Указание: решите систему неравенств:
$$\begin{cases} 3x - 5 < x + 1 \\ 3x - 5 > 0 \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

357. Указание: аналогично задаче 2 §20 учебника.

358. Указание: 1) $x^2 - 4x + 3 > 0$; 2) $\frac{3x+2}{1-x} > 0$.

3) $y = \sqrt{\lg x + \lg(x+2)}$. Решение: необходимо, чтобы выполнялась систе-

ма неравенств:
$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 2 > 0 \\ \lg x + \lg(x+2) \geq 0. \end{cases}$$

При $x > 0$ $\lg x + \lg(x+2) = \lg x(x+2) \geq 0$, т.е. $x(x+2) \geq 1$, откуда $x \geq -1 + \sqrt{2}$ или $x \leq -1 - \sqrt{2}$ (не удовлетворяет О.О.). Ответ: $x \leq -1 + \sqrt{2}$.

4) Аналогично 3).

359. 1)–3) Аналогично 4).

4) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$. Решение: О.О.Н. $x > -1$. Преобразуем н-во:

$\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) - \log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 0$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x+3}{x+1} > 0$, т.е. $\frac{2x+3}{x+1} < 1$; $\frac{x+2}{x+1} < 0$,

$-2 < x < -1$. С учетом О.О. получаем, что корней нет. Ответ: корней нет.

360. 1) Указание: данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 8. \end{cases}$$
 См. также задачу 3 §20 учебника, задачу 361.

2)–4) Аналогично 1).

361. 1) $\lg(x^2 - 8x + 13) > 0$. Решение: неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 13 > 0 \\ x^2 - 8x + 13 > 1. \end{cases}$$
 Заметим, что первое неравенство является следствием

второго, поэтому достаточно решить только второе. $x^2 - 8x + 12 > 0$, $(x-6)(x-2) > 0$, откуда $x > 6$ или $x < 2$. Ответ: $x > 6$, $x < 2$.

2) Аналогично 1).

3) Аналогично 4).

4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x - 6) \geq -3$. Решение: неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 > 0 \\ x^2 - 5x - 6 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \end{cases}, \begin{cases} x^2 - 5x - 6 > 0 \\ x^2 - 5x - 6 \leq 8 \end{cases}, \begin{cases} x^2 - 5x - 6 > 0 \\ x^2 - 5x - 14 \leq 0 \end{cases}, \begin{cases} (x-6)(x+1) > 0 \\ (x-7)(x+2) \leq 0 \end{cases}$$

Решения первого неравенства $x > 6$ или $x < -1$, второго — $-2 \leq x \leq 7$.Окончательно получаем $6 < x \leq 7$ или $-2 \leq x < -1$. Ответ: $6 < x \leq 7$, $-2 \leq x < -1$.362. 1) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 x^2 > 0$. Решение: О.О.Н.: $\begin{cases} x^2 > 0 \\ \log_2 x^2 > 0 \end{cases}$, получаем $|x| > 1$.Тогда исходное неравенство равносильно неравенству $\log_2 x^2 < 1$, т.е. $x^2 < 2$, $|x| < \sqrt{2}$. С учетом области определения $1 < |x| < \sqrt{2}$. Ответ:

$$1 < |x| < \sqrt{2}.$$

2) Аналогично 1).

363. Указание: 1) $\log_{0,2} a = -\log_5 a$; 2) $\log_{0,1} a = -\lg a$.364. Указание: сделайте замену 1) $\log_{0,2} x = u$; 2) $\log_{0,1} x = u$.365. 1) Указание: сделайте замену $\lg x = u$.2) $\log_3(2 - 3^{-x}) < x + 1 - \log_3 4$. Решение: область определения неравенства $2 - 3^{-x} > 0$, т.е. $x > \log_3 \frac{1}{2}$. Преобразуем неравенство:

$$\log_3(2 - 3^{-x}) < \log_3 \frac{3^{x+1}}{4}, \log_3(2 - 3^{-x}) - \log_3 \frac{3^{x+1}}{4} < 0, \log_3 \frac{4(2 - 3^{-x})}{3^{x+1}} < 0,$$

$$\text{откуда } \frac{4(2 - 3^{-x})}{3^{x+1}} < 1. \text{ Сделаем замену } 3^x = u > 0, \text{ тогда } \frac{4(2 - \frac{1}{u})}{3u} < 1.$$

Домножим на $3u^2 > 0$, получим $4(2u - 1) < 3u^2$. Откуда $u > 2$ или $u < \frac{2}{3}$, $3^x > 2$ или $3^x < \frac{2}{3}$, $x > \log_3 2$ или $x < \log_3 \frac{2}{3}$. С учетом О.О. $\log_3 \frac{1}{2} < x < \log_3 \frac{2}{3}$ или $x > \log_3 2$. Ответ: $\log_3 \frac{1}{2} < x < \log_3 \frac{2}{3}$, $x > \log_3 2$.

$$3) \log_{x^2-3}(4x+7) > 0. \text{ Решение: О.О.Н. } \begin{cases} 4x+7 > 0 \\ x^2-3 > 0, \\ x^2-3 \neq 1 \end{cases}$$

откуда $-1,75 < x < -\sqrt{3}$ или $x > \sqrt{3}, x \neq 2$.

Тогда, если $x^2 - 3 > 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $4x + 7 > 1$, а если $0 < x^2 - 3 < 1$, то $4x + 7 < 1$. В первом случае получаем

$$\text{систему: } \begin{cases} x > 2 \\ 4x + 7 > 1 \end{cases}, \text{ откуда } x > 2. \text{ Во втором случае: } \begin{cases} -2 < x < 2 \\ 4x + 7 < 1 \end{cases}, \text{ т.е.}$$

$x < -1,5$, с учетом области определения $-1,75 < x < -1,5$.

Ответ: $x > 2, -1,75 < x < -1,5$.

$$4) \text{ Указание: рассмотрите два случая: } \frac{x-1}{5x-6} > 1, 0 < \frac{x-1}{5x-6} < 1 \text{ (см. п.3)}$$

$$366. \frac{2}{3^x-1} \leq \frac{7}{9^x-2}. \text{ Решение: сделаем замену } 3^x = u > 0, \text{ тогда неравенство}$$

$$\text{примет вид } \frac{2}{u-1} \leq \frac{7}{u^2-2}, \text{ область определения которого } u \neq 1, u \neq \pm\sqrt{2}.$$

Перенесем все в левую часть и преобразуем, получим неравенство

$$\frac{2u^2 - 7u + 3}{(u-1)(u^2-2)} \leq 0, \text{ решая которое методом интервалов, получим } u < -\sqrt{2}$$

(не удовлетворяет условию $u > 0$), $0,5 \leq u < 1, \sqrt{2} < u \leq 3$. Т.е.

$0,5 \leq 3^x < 1, \sqrt{2} < 3^x \leq 3$. Откуда $\log_3 0,5 \leq x < 0$ или $\log_3 \sqrt{2} < x \leq 1$.

Ответ: $\log_3 0,5 \leq x < 0, \log_3 \sqrt{2} < x \leq 1$.

$$367. 4^x \left(\sqrt{16^{1-x}} - 1 + 2 \right) < 4|4^x - 1|. \text{ Решение: сделаем замену } 4^x = u > 0, \text{ тогда}$$

$$\text{неравенство примет вид } u \left(\sqrt{\frac{16}{u^2}} - 1 + 2 \right) < 4|u - 1|,$$

$$u \left(\sqrt{\frac{16}{u^2}} - 1 + 2 \right) = u \left(\sqrt{\frac{16-u^2}{u^2}} + 2 \right) = u \left(\frac{\sqrt{16-u^2}}{u} + 2 \right) = \sqrt{16-u^2} + 2u \quad (\text{второ-})$$

рое равенство справедливо т.к. $u > 0$). Таким образом, исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{16-u^2} + 2u < 4|u-1|$, область определения которого $0 < u \leq 4$. Рассмотрим два случая.

Первый: $0 < u < 1$, тогда $\sqrt{16-u^2} + 2u < 4(1-u)$, $\sqrt{16-u^2} < 4-6u$. Если $4-6u < 0$, то неравенство, очевидно, не выполнено; при $4-6u \geq 0$ возведем обе части неравенства в квадрат. Получим $16-u^2 < 36u^2 - 48u + 16$, $37u^2 - 48u > 0$, откуда $u < 0$ или $u > \frac{48}{37}$. С учетом всех ограничений в этом случае решений нет.

Второй случай: $1 \leq u \leq 4$, тогда $\sqrt{16-u^2} + 2u < 4(u-1)$, $\sqrt{16-u^2} < 2u-4$. Если $2u-4 < 0$, то неравенство, очевидно, не выполнено; при $2u-4 \geq 0$ возведем обе части неравенства в квадрат. Получим $16-u^2 < 4u^2 - 16u + 16$, $5u^2 - 16u > 0$, откуда $u < 0$ или $u > 3,2$. С учетом всех ограничений окончательный ответ $3,2 < u \leq 4$. Т.е. $3,2 < 4^x \leq 4$, $\log_4 3,2 < x \leq 1$.

Ответ: $\log_4 3,2 < x \leq 1$.

Упражнения к главе IV

368. 1) $\log_{15} 225 = \log_{15} 15^2 = 2$;

2) $\log_4 256 = \log_4 4^4 = 4$;

3) $\log_3 \frac{1}{243} = \log_3 3^{-5} = -5$;

4) $\log_7 \frac{1}{343} = \log_7 7^{-3} = -3$.

369. 1) $\log_{\frac{1}{4}} 64 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = -3$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = -4$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3$;

4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 6$.

370. 1) $\log_{11} 1 = \log_{11} 1^0 = 0$;

2) $\log_7 7 = 1$;

3) $\log_{16} 64 = \log_{16} 16^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$;

4) $\log_{27} 9 = \log_{27} 27^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$.

371. 1) $(0,1)^{-\lg 0,3} = 10^{\lg 0,3} = 0,3$;

2) $10^{-\lg 4} = 10^{\lg \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$;

3) $5^{-\log_5 3} = 5^{\log_5 \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$;

4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_6 4} = 6^{\log_6 4} = 4$.

$$372. 1) 4 \log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}} 27 - 2 \log_{\frac{1}{2}} 6 = \log_{\frac{1}{2}} 3^4 - \log_{\frac{1}{2}} 27^{\frac{2}{3}} - \log_{\frac{1}{2}} 6^2 =$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{3^4}{3^2 \cdot 36} \right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2.$$

$$2) \frac{2}{3} \lg 0,004 + \lg \sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5} \lg \sqrt{10000} = \frac{2}{3} \lg 10^{-3} + \lg 10 - \frac{3}{5} \lg 10^2 = -2 + 1 - \frac{6}{5} = -2\frac{1}{5}.$$

373. Указание: перейдите к логарифмам с натуральным (десятичным) основанием.

374. Указание: $\log_4 x = -\log_{\frac{1}{4}} x$, таким образом графики симметричны относительно оси OX .

375. Указание: 2) $\sqrt{5} > 1$; 3) $\frac{1}{e} < 1$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

376. 1) См. рис. 58; 2) См. рис. 59.

377. 1) $y = \log_5(5-2x)$. Решение: необходимо, чтобы $5-2x > 0$, отсюда $x < 2,5$

2) $y = \log_2(x^2-2x)$. Решение: необходимо $x^2-2x > 0$, отсюда $x < 0$, $x > 2$.

378. 1) $\log_{\frac{1}{2}}(7-8x) = -2$. Решение: О.О.У. $x < \frac{7}{8}$. Тогда $\log_{\frac{1}{2}}(7-8x) = \log_{\frac{1}{2}} 4$;

$$7-8x = 4, \quad x = \frac{3}{8}. \quad \text{Ответ: } x = \frac{3}{8}.$$

2) $\lg(x^2-2) = \lg x$. Решение: О.О.У. $\begin{cases} x^2-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$, откуда $x > \sqrt{2}$.

Тогда данное уравнение равносильно $x^2-2 = x$, которое имеет корни $x = -1$ (не удовлетворяет О.О.) и $x = 2$. Ответ: $x = 2$.

379. 1) $\lg(x^2-2x) = \lg 30 - 1$. Решение: $\lg 30 - 1 = \lg \frac{30}{10} = \lg 3$, тогда $x^2-2x = 3$, т.е. $x = 3$ и $x = -1$. Ответ: $x = 3$, $x = -1$.

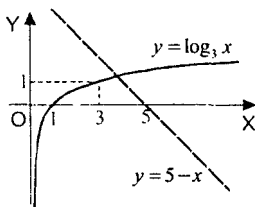


Рис. 58

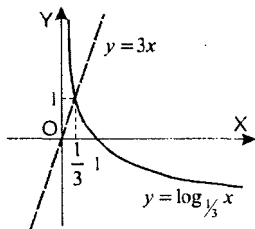


Рис. 59

2) $\log_3(2x^2 + x) = \log_3 6 - \log_3 2$. Решение: $\log_3 6 - \log_3 2 = \log_3 3$, тогда $2x^2 + x = 3$. Отсюда $x = 1$ и $x = -1,5$. Ответ: $x = 1$, $x = -1,5$.

3) Указание: сделайте замену $u = \lg x$.

4) Указание: сделайте замену $u = \log_2 x$.

380. 1) $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1$. Решение: О.О.У. $x > 3$. Тогда уравнение равносильно $\log_2(x-2)(x-3) = 1$, т.е. $(x-2)(x-3) = 2$, откуда $x = 4$ и $x = 1$ (не удовлетворяет О.О.). Ответ: $x = 4$.

2) $\log_3(5-x) + \log_3(-1-x) = 3$. Решение: О.О.У. $x < -1$. Тогда уравнение равносильно $\log_3(5-x)(-1-x) = \log_3 3^3$, т.е. $(5-x)(-1-x) = 27$, откуда $x = 8$ (не удовлетворяет О.О.) и $x = -4$. Ответ: $x = -4$.

3) Указание: на О.О. уравнение равносильно $(x-2)x = 3$.

4) Указание: на О.О. уравнение равносильно $(x-1)(x+4) = 6$.

381. 1) $\log_2(x-5) \leq 2$. Решение: О.О.Н. $x > 5$. Тогда неравенство равносильно $x-5 \leq 4$, $x \leq 9$. Совмещая с О.О., получаем $5 < x \leq 9$. Ответ: $5 < x \leq 9$.

2) $\log_3(7-x) > 1$. Решение: О.О.Н. $x < 7$. Тогда неравенство равносильно $7-x > 3$, $x < 4$. Ответ: $x < 4$.

3) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > -2$. Решение: О.О.Н. $x > -0,5$. Тогда $2x+1 < 4$, $x < 1,5$.

Совмещая с О.О., получим $-0,5 < x < 1,5$. Ответ: $-0,5 < x < 1,5$.

4) Указание: на О.О. неравенство равносильно $3-5x > 8$.

382. 1) $\log_3(5-4x) < \log_3(x-1)$. Решение: О.О.Н. $1 < x < 1\frac{1}{4}$. Тогда неравен-

ство равносильно $5-4x < x-1$; $5x > 6$, $x > 1\frac{1}{5}$. Совмещая с О.О., полу-

чаем $1\frac{1}{5} < x < 1\frac{1}{4}$. Ответ: $1\frac{1}{5} < x < 1\frac{1}{4}$.

2) $\log_{0,3}(2x+5) \leq \log_{0,3}(x+1)$. Решение: О.О.Н. $x > -1$. Так как $0,3 < 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $2x+5 \geq x+1$, $x \geq -4$. С учетом О.О. получаем $x > -1$. Ответ: $x > -1$.

383. 1) $\lg(x^2 + 2x + 2) < 1$. Решение: область определения неравенства x – любое вещественное число. Так как $10 > 1$, исходное неравенство равносильно неравенству $x^2 + 2x + 2 < 10$, откуда $-4 < x < 2$. Ответ: $-4 < x < 2$.

Проверь себя!

1. 1) $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$; 2) $\lg 0,01 = \lg 10^{-2} = -2$;

3) $2^{\log_2 3} = 3$; 4) $3^{2\log_2 7} = 3^{\log_2 49} = 49$;

5) $\log_2 68 - \log_2 17 = \log_2 68 : 17 = \log_2 4 = 2$.

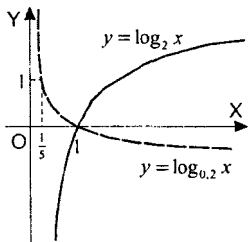


Рис. 60

2. См. рис. 60.

3. $\log_{0,2} 3 < \log_{0,2} 2,5$ т.к. $0,2 < 1$;

$\log_2 0,7 < \log_2 1,2$ т.к. $2 > 1$.

4. 1) Указание: на О.О. данное уравнение равносильно $3x + 1 = 25$;2) Указание: на О.О. данное уравнение равносильно $x(x + 2) = 3$;3) Указание: на О.О. данное уравнение равносильно $x^2 - 6x + 9 = 3(x + 3)$.

$$5. \begin{cases} \ln x - \ln y = \ln 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln \frac{x}{y} = \ln 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 5 \end{cases}$$

6. 1) Указание: на О.О. данное неравенство равносильно $x - 1 \leq 9$.2) Указание: на О.О. данное неравенство равносильно $2 - x < 5$.

384. 1) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} = \log_{\sqrt{3}} 3^{-\frac{4}{3}} = 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{3}$;

2) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25\sqrt[4]{5}} = \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^{4-\frac{1}{2}} = -4,5$;

3) $2^{2-\log_2 5} = \frac{2^2}{2^{\log_2 5}} = \frac{4}{5} = 0,8$;

4) $3,6^{\log_1 10+1} = 3,6 \cdot 10 = 36$;

5) $2 \log_5 \sqrt{5} + 3 \log_2 8 = 2 \cdot \frac{1}{2} \log_5 5 + 3 \cdot 3 \log_2 2 = 1 + 9 = 10$;

6) $\log_2 \log_2 \log_2 2^{16} = \log_2 \log_2 16 = \log_2 (4 \log_2 2) = \log_2 4 = 2$.

385. 1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$. Решение: рассмотрим отношение этих чисел:

$$\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}\right) \Big/ \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}\right) = \frac{\log_2 3}{\log_3 2} = \frac{1}{\log_3^2 2} > 1, \text{ т.к. } \log_3 2 < 1. \text{ Т.е. первое число}$$

больше. Ответ: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$.

2) $2^{2\log_2 5 + \log_{\frac{1}{4}} 9}$ и $\sqrt{8}$. Решение: преобразуем первое число:

$$2^{2\log_2 5 + \log_{\frac{1}{4}} 9} = (2^{\log_2 5})^2 \cdot 2^{\log_{\frac{1}{4}} 9} = 25 \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{2}. \text{ Т.е. необходимо сравнить } \frac{25}{2} \text{ и}$$

$\sqrt{8}$. Домножим оба числа на 2 и сравним числа 25 и $2\sqrt{8}$. Возведем в квадрат, получим $125 > 32$, следовательно, первое число больше. Ответ:

$$2^{2\log_2 5 + \log_{\frac{1}{4}} 9} > \sqrt{8}.$$

386. Указание: $\log_{30} 64 = \frac{\lg 64}{\lg 30} = \frac{6 \lg 2}{1 + \lg 3} = \frac{6(1 - \lg 5)}{1 + \lg 3}$.

387. Указание: $\log_{36} 15 = \frac{\lg 15}{\lg 36} = \frac{\lg 5 + \lg 3}{2 \lg 3 + 2 \lg 2} = \frac{\lg 5 + \lg 3}{2 \lg 3 + 2(1 - \lg 5)}$.

388. 1) Указание: так как $8 < 10$, то необходимо $x > 1$.

2) Указание: так как $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$, то необходимо $0 < x < 1$.

389. 1) См. рис. 61.

2) См. рис. 62.

390. 1) $3^{4x} = 10$. Решение: по определению логарифма $4x = \log_3 10$, откуда $x = \log_3 \sqrt[4]{10}$. Ответ: $x = \log_3 \sqrt[4]{10}$.

2) $2^{3x} = 3$. Решение: $3x = \log_2 3$, откуда $x = \log_2 \sqrt[3]{3}$. Ответ: $x = \log_2 \sqrt[3]{3}$.

3) $13^{3x-2} = 3$. Решение: $3x-2 = \log_{13} 3$; $3x = \log_{13} 3 + 2$. Ответ: $x = \frac{\log_{13} 3 + 2}{3}$.

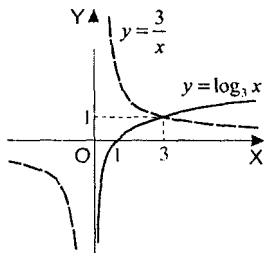


Рис. 61

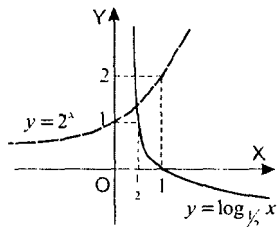


Рис. 62

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-4x} = 1,5$. Решение: по определению логарифма $5+4x = \log_3 1,5$,

откуда $x = \frac{\log_3 1,5 - 5}{4} = \frac{-6 + \log_3 2}{4}$. Ответ: $x = \frac{-6 + \log_3 2}{4}$.

5) Указание: сделайте замену $u = 4^x$, тогда $u^2 - 4u - 14 = 0$.

6) $25^x + 2 \cdot 5^x - 15 = 0$. Решение: сделаем замену $5^x = u > 0$, тогда $u^2 + 2u - 15 = 0$. Откуда $u = -5$ (не удовлетворяет условию $u > 0$) или $u = 3$. Т.е. $5^x = 3$, $x = \log_5 3$. Ответ: $x = \log_5 3$.

391. 1) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Преобразуем левую часть: $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{6} \log_3 x$.

Т.е. $\log_3 x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \sqrt{3}$. Ответ: $x = \sqrt{3}$.

2) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Преобразуем левую часть: $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = \log_3 x + 2 \log_3 x - \log_3 x = 2 \log_3 x$, то есть

$2 \log_3 x = 6$; $\log_3 x = 3$, откуда $x = 27$. Ответ: $x = 27$.

3) $\log_3 x \cdot \log_2 x = 4 \log_3 2$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Преобразуем левую часть, получим: $\log_3 x \cdot \log_2 x = \log_3 x \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 2} = \frac{\log_3^2 x}{\log_3 2}$. Т.е. $\log_3^2 x = 4 \log_3^2 2$,

$\log_3 x = \pm 2 \log_3 2$, откуда $\log_3 x = \log_3 4$ или $\log_3 x = \log_3 \frac{1}{4}$. Окончательно

получаем $x = 4$ или $x = \frac{1}{4}$. Ответ: $x = 4$, $x = \frac{1}{4}$.

4) $\log_5 x \cdot \log_3 x = 9 \log_5 3$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Преобразуем левую часть: $\log_5 x \cdot \log_3 x = \frac{\log_5 x \cdot \log_5 x}{\log_5 3} = \frac{\log_5^2 x}{\log_5 3}$. Т.е. $\log_5^2 x = 9 \log_5^2 3 = \log_5^2 3^3$,

отсюда $x = 27$ или $x = \frac{1}{27}$. Ответ: $x = 27$, $x = \frac{1}{27}$.

392. 1) $\log_3(2-x^2) - \log_3(-x) = 0$. Решение: $\log_3 \frac{(2-x^2)}{-x} = 1$; $\frac{(2-x^2)}{-x} = 3$;

$x^2 - x - 2 = 0$. Т.е. $x = -1$ и $x = 2$ (посторонний корень). Ответ: $x = -1$.

2) $\log_4(x^2 - 12) - \log_5(-x) = 0$. Решение: $\log_5 \frac{(x^2 - 12)}{-x} = 0$; $\frac{(x^2 - 12)}{-x} = 1$;
 $x^2 + x - 12 = 0$. Т.е. $x = 3$ (посторонний корень) и $x = -4$. Ответ: $x = -4$.

3) $\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{3x-7} = 2$. Решение: О.О.У. $x > 3$. Тогда

$$\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{3x-7} = \frac{1}{2} \log_2 (x-3)(3x-7), \text{ т.е. } (x-3)(3x-7) = 16;$$

$3x^2 - 16x + 5 = 0$. Тогда $x = \frac{1}{3}$ (не удовлетворяет ОО) и $x = 5$. Ответ: $x = 5$.

4) $\lg(x+6) - \lg \sqrt{2x-3} = \lg 4$. Решение: О.О.У. $x > 1,5$. Преобразуем урав-

нение: $\lg \frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} = \lg 4$. Т.е. $\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} = 4$, $x+6 = 4\sqrt{2x-3}$. С учетом О.О.

обе части уравнения неотрицательны, поэтому можно возвести в квадрат:
 $x^2 + 12x + 36 = 32x - 48$, $x^2 - 20x + 84 = 0$, откуда $x = 6$ или $x = 14$.
 Ответ: $x = 6$, $x = 14$.

393. 1) Указание: уравнение равносильно $\log_2 x^2 + \log_2 x^2 + \frac{1}{6} \log_2 x^2 = 13$,
 т.е. $\log_2 x^2 = 6$.

2) Указание: ур-е равносильно $-\log_2(x+2) - \log_2(x-3) = -\frac{2}{2} \log_2(-4x-8)$;
 $(x+2)(x-3) = -4x-8$.

394. 1) $\log_{\frac{1}{x}} 5 + \log_{\frac{1}{x^2}} 12 + \frac{1}{2} \log_x 3 = 1$. Решение: О.О.У. $x > 0, x \neq 1$. Тогда:

$$\log_{\frac{1}{x}} 5 + \log_{\frac{1}{x^2}} 12 + \frac{1}{2} \log_x 3 = -\log_x 5 - \frac{1}{2} \log_x 12 + \frac{1}{2} \log_x 3 = \log_x \left(\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{12}} \right),$$

т.е. $\log_x \left(\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{12}} \right) = 1$, откуда $x = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 2,5$. Ответ: $x = 2,5$.

2) Указание: уравнение равносильно $\log_x \sqrt{7} + \log_x 9 - \log_x \sqrt{28} = \log_x x$,

т.е. $\frac{\sqrt{7} \cdot 9}{\sqrt{28}} = x$.

395. 1) $\log_2 \frac{2}{x-1} = \log_2 x$. Решение: О.О.У. $\begin{cases} \frac{2}{x-1} > 0 \\ x > 0 \end{cases}$, откуда $x > 1$. Тогда

уравнение равносильно $\frac{2}{x-1} = x$, $x^2 - x - 2 = 0$. Т.е. $x = -1$ (не удовлет-

воряет О.О.) и $x = 2$. Ответ: $x = 2$.

$$2) \log_{\frac{1}{2}} \frac{10}{7-x} = \log_{\frac{1}{2}} x. \text{ Решение: О.О.У. } \begin{cases} \frac{10}{7-x} > 0 \\ x > 0 \end{cases}, \text{ откуда } 0 < x < 7. \text{ Тогда}$$

да уравнение равносильно $\frac{10}{7-x} = x; x^2 - 7x + 10 = 0$. Т.е. $x = 2$ и $x = 5$.

Ответ: $x = 2, x = 5$.

$$3) \lg \frac{x+8}{x-1} = \lg x. \text{ Решение: О.О.У. } \begin{cases} \frac{x+8}{x-1} > 0 \\ x > 0 \end{cases}, \text{ откуда } x > 1. \text{ Тогда уравнение}$$

равносильно $\frac{x+8}{x-1} = x; x^2 - 2x - 8 = 0$. Т.е. $x = 4$ и $x = -2$ (не удовлетворяет О.О.). Ответ: $x = 4$.

$$4) \lg \frac{x-4}{x-2} = \lg x. \text{ Решение: О.О.У. } \begin{cases} \frac{x-4}{x-2} > 0 \\ x > 0 \end{cases}, \text{ откуда } 0 < x < 2 \text{ или } x > 4.$$

Тогда уравнение равносильно $\frac{x-4}{x-2} = x, \frac{x-4-x(x-2)}{x-2} = 0, \frac{-x^2+3x-4}{x-2} = 0$,

откуда получаем, что корней нет. Ответ: корней нет.

396. 1) $\log_{\sqrt{6}}(x-4) + \log_{\sqrt{6}}(x+1) \leq 2$. Решение: О.О.Н. $x > 4$. Тогда данное неравенство равносильно $\log_{\sqrt{6}}(x-4)(x+1) \leq \log_{\sqrt{6}} 6; (x-4)(x+1) \leq 6; x^2 - 3x - 10 \leq 0$. Отсюда $-2 \leq x \leq 5$. С учетом О.О. получаем $4 < x \leq 5$.

Ответ: $4 < x \leq 5$.

2) Указание: на ОО неравенство равносильно $\log_{3\sqrt{2}}(x-5)(x+12) \leq \log_{3\sqrt{2}} 18; (x-5)(x+12) \leq 18; x^2 + 7x - 78 \leq 0$.

3) Указание: на О.О. данное неравенство равносильно $\log_3 \frac{8x^2+x}{x^3} > \log_3 9;$

$$\frac{8x^2+x}{x^3} > 9; 9x^3 - 8x^2 - x < 0; x(9x^2 - 8x - 1) < 0.$$

4) Указание: на О.О. данное неравенство равносильно $\log_2 \frac{x(x-3)}{4} > 0;$

$$x(x-3) > 4; x^2 - 3x - 4 > 0.$$

5) Указание: на О.О. данное неравенство равносильно $\log_{\frac{1}{5}} \frac{x-10}{x+2} \geq \log_{\frac{1}{5}} 5;$

$$\frac{x-10}{x+2} \leq 5; 4x \geq -20.$$

6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+10) + \log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+4) > -2$. Решение: О.О.Н. $x > -4$. Тогда ис-

ходное неравенство равносильно неравенству $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+10)(x+4) > -2$.

Т.к. $\frac{1}{\sqrt{7}} < 1$, то необходимо $(x+10)(x+4) < 7$, $x^2 + 14x + 33 < 0$, откуда

$$-11 < x < -3. \text{ С учетом О.О. окончательно получаем: } -4 < x < -3.$$

Ответ: $-4 < x < -3$.

397. 1) $4\log_4 x - 33\log_x 4 \leq 1$. Решение: область определения неравенства

$x > 0, x \neq 1$. Тогда $4\log_4 x - 33\log_x 4 = 4\log_4 x - 33 \cdot \frac{1}{\log_4 x}$. Сделаем заме-

ну $u = \log_4 x$, получим $4u - \frac{33}{u} \leq 1$, $\frac{4u^2 - u - 33}{u} \leq 0$, откуда $u \leq \frac{1 - \sqrt{397}}{8}$

или $0 < u \leq \frac{1 + \sqrt{397}}{8}$. Тогда $0 < \log_4 x \leq \frac{1 + \sqrt{397}}{8}$, $1 < x \leq 4^{\frac{1 + \sqrt{397}}{8}}$.

Ответ: $1 < x \leq 4^{\frac{1 + \sqrt{397}}{8}}$.

2) Аналогично 1).

398. Доказать, что если последовательность положительных чисел является геометрической прогрессией, то их логарифмы по одному основанию образуют геометрическую прогрессию.

Решение: обозначим эти три числа b_1, b_2, b_3 . Тогда по свойству геометри-

ческой прогрессии $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$. Прологарифмируем это равенство, полу-

$$\text{чим} \quad \log_a b_2^2 = \log_a (b_1 b_3), \quad 2 \log_a b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_3,$$

$\log_a b_2 = \frac{\log_a b_1 + \log_a b_3}{2}$, т.е. $\log_a b_1, \log_a b_2$ и $\log_a b_3$ образуют арифме-

тическую прогрессию (по свойству арифметической прогрессии).

399. Найти три последовательных члена геометрической прогрессии, если их сумма равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3.

Решение: обозначим эти три числа $b_1, qb_1, q^2 b_1$. Тогда:

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 62 \\ \lg b_1 + \lg(qb_1) + \lg(q^2 b_1) = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 62 \\ 3 \lg b_1 + 3 \lg q = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 62 \\ \lg b_1 + \lg q = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 62 \\ \lg(b_1q) = 1 \end{cases}; \begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 62 \\ b_1q = 10 \end{cases}$$

Откуда $\frac{1+q+q^2}{q} = \frac{62}{10}$, $q = 5$ или $q = \frac{1}{5}$. В первом случае $b_1 = 2$, во втором $b_1 = 50$. Ответ: 2, 10, 50 или 50, 10, 2.

400. 1) $y = \frac{1}{\log_2 x}$. Решение: О.О.Ф. $x > 0, x \neq 1$. При $0 < x < 1$ $y = \log_2 x < 0$

и является возрастающей функцией, следовательно $y = \frac{1}{\log_2 x} < 0$ и убывает.

Аналогично при $x > 1$ $y = \frac{1}{\log_2 x} > 0$ и убывает (см. рис. 63).

2) Аналогично 1). См. рис. 64.

401. 1) $x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 6$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Рассмотрим $\lg(9^{\lg x}) = \lg x \cdot \lg 9 = \lg 9 \cdot \lg x = \lg(x^{\lg 9})$, откуда $x^{\lg 9} = 9^{\lg x}$, т.е. уравнение равносильно уравнению $2 \cdot 9^{\lg x} = 6$, $3^{2 \lg x} = 3$, $2 \lg x = 1$, $x = \sqrt{10}$.

Ответ: $x = \sqrt{10}$.

2) $x^{3 \lg^3 x - \frac{2}{3} \lg x} = 100 \sqrt[3]{10}$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Возьмем логарифм по основанию 10 от обеих частей уравнения. Получим:

$\left(3 \lg^3 x - \frac{2}{3} \lg x\right) \lg x = \lg(100 \sqrt[3]{10})$. Сделаем замену $\lg x = u$, тогда

$\left(3u^3 - \frac{2}{3}u\right)u = 2\frac{1}{3}$, $9u^4 - 2u^2 - 7 = 0$. Это уравнение квадратное относи-

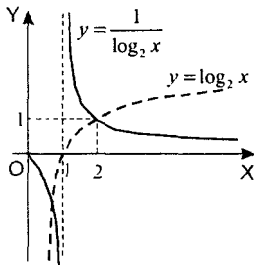


Рис. 63

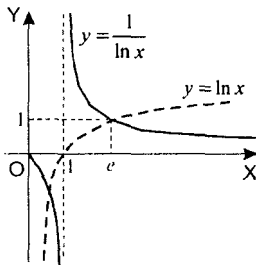


Рис. 64

тельно u^2 , его корни $u^2 = 1$ и $u^2 = -\frac{7}{9}$ (посторонний корень). Тогда $\lg x = \pm 1$, $x = 10$ или $x = 0,1$. Ответ: $x = 10$, $x = 0,1$.

402. Аналогично задаче 348.

403. 1) $\log_2(2^x - 5) - \log_2(2^x - 2) = 2 - x$. Решение: преобразуем уравнение

$$\log_2(2^x - 5) - \log_2(2^x - 2) = \log_2 \frac{2^x - 5}{2^x - 2}, \quad 2 - x = \log_2 2^{2-x}. \text{ То есть}$$

$$\log_2 \frac{2^x - 5}{2^x - 2} = \log_2 2^{2-x}, \quad \frac{2^x - 5}{2^x - 2} = 2^{2-x}. \text{ Сделаем замену } 2^x = u > 0, \text{ тогда}$$

$$\frac{u-5}{u-2} = \frac{4}{u}, \quad \frac{u^2 - 5u - 4u + 8}{(u-2)u} = 0, \text{ т.е. } u^2 - 9u + 8 = 0, \text{ откуда } u = 1 \text{ и } u = 8.$$

Тогда $2^x = 1$ или $2^x = 8$, $x = 0$ или $x = 3$. Проверка показывает, что первый корень является посторонним. Ответ: $x = 3$.

2) Аналогично 4).

3) Аналогично 1).

4) $\log_{3x+7}(5x+3) = 2 - \log_{3x+7}(3x+7)$. Решение: область определения урав-

$$\text{нения } \begin{cases} 5x+3 > 0, 5x+3 \neq 1 \\ 3x+7 > 0, 3x+7 \neq 1 \end{cases}, \quad x > -0,6, x \neq -0,4.$$

Тогда $\log_{3x+7}(5x+3) = 2 - \frac{1}{\log_{3x+7}(5x+3)}$. Заменим $\log_{3x+7}(5x+3) = u$,

$$\text{тогда } u = 2 - \frac{1}{u}, \quad \frac{u^2 - 2u + 1}{u} = 0, \quad u = 1. \text{ Т.е. } \log_{3x+7}(5x+3) = 1;$$

$$3x+7 = 5x+3, \quad x = 2. \text{ Ответ: } x = 2.$$

404. 1) $\log_{\sqrt{3}}(2^{x^2} - 4^x) \geq -2$. Решение: данное неравенство равносильно

$$0 < 2^{x^2} - 4^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}. \text{ Сделаем замену } 2^x = u > 0, \text{ тогда: } \begin{cases} 4u - u^2 > 0 \\ 4u - u^2 \leq 9, \\ u > 0. \end{cases}$$

тогда $0 < u < 4$, $0 < 2^x < 4$, $x < 2$. Ответ: $x < 2$.

2) Аналогично 1).

405. $\log_2 x \cdot \log_2(x-3) + 1 = \log_2(x^2 - 3x)$. Решение: О.О.У. $\begin{cases} x > 0 \\ x-3 > 0 \\ x^2 - 3x > 0 \end{cases}$, т.е.

$x > 3$. Тогда $\log_2(x^2 - 3x) = \log_2 x + \log_2(x-3)$, откуда следует, что $\log_2 x \cdot \log_2(x-3) + 1 = \log_2 x + \log_2(x-3)$, $(\log_2 x - 1)(\log_2(x-3) - 1) = 0$, т.е. $\log_2 x = 1$ или $\log_2(x-3) = 1$. Из первого уравнения получаем $x = 2$ (не удовлетворяет О.О.), из второго уравнения — $x = 5$.

Ответ: $x = 5$.

406. $\frac{1}{\log_a x - 1} + \frac{1}{\log_a x^2 + 1} < -\frac{3}{2}$. Решение: О.О.Н. $\begin{cases} x > 0 \\ \log_a x \neq 1 \\ \log_a x \neq -0,5 \end{cases}$, т.е.

$x > 0, x \neq a, x \neq a^{-0.5}$. Сделаем замену $u = \log_a x$, тогда $\frac{1}{u-1} + \frac{1}{2u+1} < -\frac{3}{2}$.

$$\frac{2(2u+1) + 2(u-1) + 3(2u+1)(u-1)}{2(u-1)(2u+1)} < 0, \quad \frac{3(2u^2 + u - 1)}{2(u-1)(2u+1)} < 0, \quad \frac{3(2u-1)(u+1)}{2(u-1)(2u+1)} < 0.$$

Решая методом интервалов, получим $-1 < u < -0,5$ или $0,5 < u < 1$, т.е. $-1 < \log_a x < -0,5$ или $0,5 < \log_a x < 1$.

Если $0 < a < 1$, то получаем $a^{-0.5} < x < a^{-1}$, $a < x < a^{0.5}$.

Если $a > 1$, то получаем $a^{-1} < x < a^{-0.5}$, $a^{0.5} < x < a$.

Ответ: при $0 < a < 1$ $a^{-0.5} < x < a^{-1}$, $a < x < a^{0.5}$,

при $a > 1$ $a^{-1} < x < a^{-0.5}$, $a^{0.5} < x < a$.

Глава V

Тригонометрические формулы

§21. Радианная мера угла

Формулы перехода:

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha \right)^\circ; \quad \alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ рад};$$

$$1 \text{ рад} \approx 57,3^\circ.$$

Основные геометрические формулы:

$l = \alpha R$, где l – длина дуги, R – радиус окружности, α – центральный угол в радианах;

$S = \frac{\alpha R^2}{2}$, где S – площадь кругового сектора, R – радиус окружности, α – центральный угол в радианах.

407. 1) $40^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 40 = \frac{2\pi}{9}$;

2) $120^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 120 = \frac{2\pi}{3}$;

3) $150^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 150 = \frac{5\pi}{6}$;

4) $75^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 75 = \frac{5\pi}{12}$;

5) $32^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 32 = \frac{8\pi}{45}$;

6) $140^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 140 = \frac{7\pi}{9}$.

408. 1) $\frac{\pi}{6} = \frac{180 \cdot \pi}{6 \cdot \pi} = 30^\circ$;

2) $\frac{\pi}{9} = \frac{180 \cdot \pi}{9 \cdot \pi} = 20^\circ$;

3) $\frac{3\pi}{4} = \frac{180 \cdot 3\pi}{4 \cdot \pi} = 135^\circ$;

4) $2 = \frac{180 \cdot 2}{\pi} = \left(\frac{360}{\pi} \right)^\circ$;

5) $3 = \frac{180 \cdot 3}{\pi} = \left(\frac{540}{\pi} \right)^\circ$;

6) $0,36 = \left(\frac{180 \cdot 0,36}{\pi} \right)^\circ = \left(\frac{64,8}{\pi} \right)^\circ$;

409. Ответы: а) $60^\circ = \frac{\pi}{3}$; б) $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ и $90^\circ = \frac{\pi}{2}$; в) $90^\circ = \frac{\pi}{2}$; г) $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$.

410. Решение: по формуле $R = \frac{l}{\alpha} = \frac{0,36}{0,9} = 0,4$. Ответ: 0,4 м.

411. Решение: по формуле $\alpha = \frac{l}{R} = \frac{0,03}{0,015} = 2$ рад. Ответ: 2 рад.

412. Решение: по формуле $S = \frac{\alpha R^2}{2} = \frac{3\pi}{8} \cdot 1^2 \text{ см}^2$. Ответ: $\frac{3\pi}{8} \text{ см}^2$.

413. Решение: по формуле $\alpha = \frac{2S}{R^2} = \frac{2 \cdot 0,000625}{0,000625} = 2$. Ответ: 2 рад.

414. $0,5^\circ = \frac{\pi}{360}$; $36^\circ = \frac{\pi}{5}$; $159^\circ = \frac{159\pi}{180}$; $108^\circ = \frac{3\pi}{5}$;

$$\frac{5\pi}{6} = 150^\circ; \frac{3\pi}{10} = 54^\circ; 2,5 = \left(\frac{450}{\pi}\right)^\circ; 1,8 = \left(\frac{324}{\pi}\right)^\circ.$$

415. См. табл. 1.

Таблица 1

Угол, °	30	36	$\frac{90}{\pi}$	$\frac{720}{\pi}$	$\frac{360}{\pi}$	$\frac{180}{\pi}$
Угол, рад	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1}{2}$	4	2	1
Радиус, см	2	$\frac{10}{\pi}$	10	5	5	10
Длина дуги, см	$\frac{\pi}{3}$	2	5	20	10	10
Площадь сектора, см ²	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{10}{\pi}$	25	50	25	50

§22. Поворот точки вокруг начала координат

416. Найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки (1;0) на угол:

1), 2) Аналогично 3).

3) $-6,5\pi$. Решение: $-6,5\pi = -3 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$, поэтому поворот этой точки на $-6,5\pi$ совпадает с поворотом этой точки на $-\frac{\pi}{2}$, т.е. в точку (0; -1).

4) $\frac{\pi}{4}$. Решение: см. рис. 65. Из геометрических соображений длина отрезка OA равна

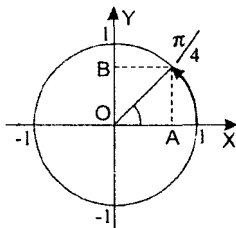


Рис. 65

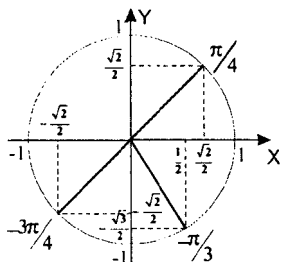


Рис. 66

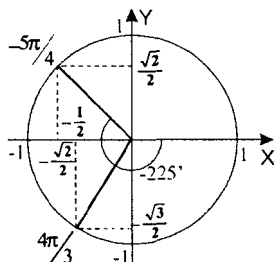


Рис. 67

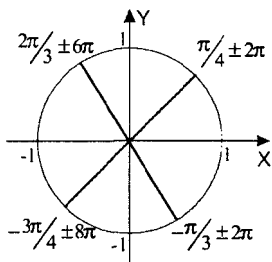


Рис. 68

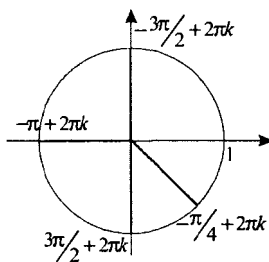


Рис. 69

длине отрезка OB и равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Т.е. получим точку $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5) Аналогично 3).

6) Указание: $-45^\circ = -\frac{\pi}{4}$, аналогично 4).

417. 1)–3) См. рис. 66.

4)–6) См. рис. 67.

418. См. рис. 68.

419. См. рис. 69.

420. Ответы: 1) $(-1; 0)$; 2) $(0; 1)$; 3) $(0; 1)$;

4) $(-1; 0)$; 5) $(-1; 0)$; 6) $(-1; 0)$.

421. 1) $(0; 1)$; 2) $(0; 1)$; 3) $(0; -1)$; 4) $(0; -1)$

422. 1), 2) Указание: рассмотрите два случая ($+\pi$ и $-\pi$).

3), 4) Указание: рассмотрите отдельно случай четного и нечетного k .

423. См. рис. 70, k – целое число.

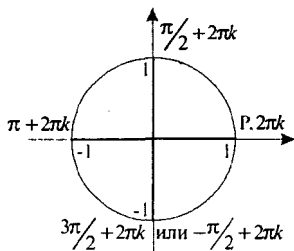


Рис. 70

424. Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом из точки $P(1; 0)$ на угол:

1) Решение: т.к. $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, то точка P лежит на единичной окружности в первой четверти. Ответ: I четверть.

2) Указание: $\frac{\pi}{2} < 2,25 < \pi$, аналогично 1).

3) Указание: $\pi < 2,25 < \frac{3\pi}{2}$, аналогично 1).

4) Указание: $\frac{3\pi}{2} < 2,25 < 2\pi$, аналогично 1).

425. Найти число x , где $0 \leq x < 2\pi$ и натуральное число k , такое, чтобы выполнялось равенство $a = x + 2\pi k$, если:

1) Решение: $a = 9,8\pi = 1,8\pi + 8\pi = 1,8\pi + 4 \cdot 2\pi$, откуда $x = 1,8\pi$, $k = 4$.

2) Решение: $a = 7\frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi + 6\pi = 1\frac{1}{3}\pi + 3 \cdot 2\pi$, откуда $x = \frac{4\pi}{3}$, $k = 3$.

3) Решение: $a = \frac{11}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi + 4\pi = \frac{3}{2}\pi + 2 \cdot 2\pi$, откуда $x = \frac{3\pi}{2}$, $k = 2$.

4) Решение: $a = \frac{17}{3}\pi = \frac{5\pi}{3} + 4\pi = \frac{5\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$, откуда $x = \frac{5\pi}{3}$, $k = 2$.

426. Указание: 1) $4,5\pi = 4\pi + \frac{\pi}{2}$; 2) $5,5\pi = 6\pi - \frac{\pi}{2}$; 4) $-7\pi = -8\pi + \pi$.

427. 1) Указание: $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + 2\pi(k-1)$, см. рис 70.

2) Указание: $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(k+2)$, см. рис 70.

3) Указание: $\frac{7\pi}{2} + 2\pi k = \frac{3\pi}{2} + 2\pi(k+2)$, см. рис 70.

4) Указание: $-\frac{9\pi}{2} + 2\pi k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(k-4)$, см. рис 70.

428. 1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Решение: рассмотрим треугольник AOB (см. рис 71). Длина стороны AO равна длине AB и равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Т.е. треугольник AOB прямоугольный равнобедренный, $\angle AOB = 45^\circ = \pi/4$. Т.е. $\angle AOC = -\pi/4$. Значит

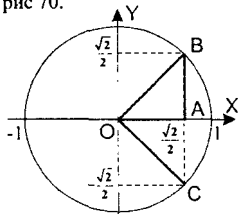


Рис. 71

все такие углы имеют вид $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где k – целое число.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где k – целое число.

2)–4) Аналогично 1).

§23. Определение синуса, косинуса и тангенса угла

О п р е д е л е н и е :

sin α – ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) на угол α вокруг начала координат;

cos α – абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) на угол α вокруг начала координат.

$$\sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pi k, k \in \mathbf{Z};$$

$$\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z};$$

$$\sin \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z};$$

$$\cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2\pi k, k \in \mathbf{Z};$$

$$\sin \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z};$$

$$\cos \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

429. См. рис. 72.

430. 1) $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} = 1 + (-1) = 0;$

2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{2} = -1 + 0 = -1;$

3) $\sin \pi - \cos \pi = 0 - (-1) = 1;$

4) $\sin 0 - \cos 2\pi = 0 - 1 = -1;$

5) $\sin \pi + \sin 1,5\pi = \sin \pi + \sin \frac{3\pi}{2} = 0 + (-1) = -1;$

6) $\sin 0 + \cos 2\pi = 0 + 1 = 1.$

431. 1) $\beta = 3\pi. \sin \beta = \sin 3\pi = \sin(\pi + 2\pi) = \sin \pi = 0, \cos \beta = \cos \pi = -1.$

2) $\beta = 4\pi. \sin \beta = \sin 4\pi = \sin(0 + 2 \cdot 2\pi) = \sin 0 = 0, \cos \beta = \cos 0 = 1.$

3) $\beta = 3,5\pi. \sin \beta = \sin 3,5\pi = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi\right) = \sin \frac{3}{2}\pi = -1, \cos \beta = \cos \frac{3}{2}\pi = 0.$

4) $\beta = \frac{5}{2}\pi. \sin \beta = \sin \frac{5}{2}\pi = \sin\left(\frac{1}{2}\pi + 2\pi\right) = \sin \frac{1}{2}\pi = 1, \cos \beta = \cos \frac{1}{2}\pi = 0.$

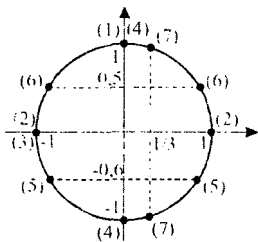


Рис. 72

5) $\beta = \pi k, k \in \mathbf{Z}$. Решение: если $k = 2n$, то $\sin \beta = \sin 2\pi n = 0$ и $\cos \beta = \cos 2\pi n = 1$. Если же $k = 2n + 1$, то $\sin \beta = \sin(2\pi n + \pi) = \sin \pi = 0$, а $\cos \beta = \cos(2\pi n + \pi) = \cos \pi = -1$. Ответ: 0 и $(-1)^k$.

6) Аналогично 5).

432. 1) $\sin 3\pi - \cos \frac{3\pi}{2} = \sin \pi - \cos \frac{3\pi}{2} = 0 - 0 = 0$. Ответ: 0.

2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3,5\pi = \cos 0 - \cos \pi + \cos \frac{3}{2}\pi = 1 + 1 + 0 = 2$. Ответ: 0.

3) $\sin \pi k + \cos 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$. Решение: если k четное, то $\sin \pi k + \cos 2\pi k = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$; если k нечетное, то $\sin \pi k + \cos 2\pi k = \sin \pi + \cos 0 = 0 + 1 = 1$. Ответ: 1.

4) $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin \frac{(4k+1)\pi}{2}$. Решение: точка $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ совпадает с точкой $\frac{\pi}{2}$ при четном k и с точкой $-\frac{\pi}{2}$ при нечетном k . Поэтому:

$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin \frac{(4k+1)\pi}{2} = 0 - \sin \left(2\pi k + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1. \text{ Ответ: } -1.$$

433. 1) $\operatorname{tg} \pi + \cos \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} + \cos \pi = \frac{0}{-1} + (-1) = -1$;

2) $\operatorname{tg} 0^\circ - \operatorname{tg} 180^\circ = \operatorname{tg} 0 - \operatorname{tg} \pi = \frac{\sin 0}{\cos 0} - \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{1} - \frac{0}{-1} = 0$;

3) $\operatorname{tg} \pi + \sin \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} + \sin \pi = \frac{0}{-1} + 0 = 0$;

4) $\cos \pi - \operatorname{tg} 2\pi = \cos \pi - \frac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi} = -1 - \frac{0}{1} = -1$.

434. 1) $3 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 1,5$;

2) $5 \sin \frac{\pi}{4} + 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 5 \cos \frac{\pi}{4} - 10 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 5 \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 - 5 \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 = -7$;

3) $\left(2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right) : \cos \frac{\pi}{6} = \left(2 \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \right) : \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

4) $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{1}{4}$.

435. 1) $2 \sin x = 0$. Решение: исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k, k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

2) $\frac{1}{2} \cos x = 0$. Решение: $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

3) $\cos x - 1 = 0$. Решение: $\cos x = 1$, т.е. $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Ответ: $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4) $1 - \sin x = 0$. Решение: $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

436. Указание: $\sin x$ и $\cos x$ могут принимать любые значения из промежутка $[-1; 1]$, и только их.

437. 1) $2 \sin \alpha + \sqrt{2} \cos \alpha = 2 \sin \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + 1$;

2) $0,5 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha = 0,5 \cos \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} = 0,5 \frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$

3) $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha = \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$;

4) $\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{3} = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$.

438. 1) $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$;

2) $2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 6 - 3 + \frac{1}{4} = 3 \frac{1}{4}$;

3) $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} \right) \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = 1 - \frac{3}{9} = \frac{2}{3}$;

4) $2 \cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12}$.

439. 1) $\sin x = -1$. Решение: $x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Ответ: $x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) $\cos x = -1$. Решение: $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Ответ: $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

3) $\sin 3x = 0$. Решение: $3x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, т.е. $x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Ответ: $x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

4) $\cos 0,5x = 0$. Решение: $0,5x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, т.е. $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

5) $\sin\left(\frac{x}{2} + 6\pi\right) = 1$. Решение: $\frac{x}{2} + 6\pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$, т.е. $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - 6\pi$, откуда $x = \pi + 2 \cdot 2\pi(k - 3)$, $k \in \mathbf{Z}$. Но если k «пробегает» все множество \mathbf{Z} , то и $k - 3$ «пробегает» все \mathbf{Z} . Поэтому $x = \pi + 4\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \pi + 4\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

6) Аналогично 5).

§24. Знаки синуса, косинуса и тангенса

442. 1) $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Решение: т.к. $0 < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, то точка находится в I четверти.

2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. II четверть; 3) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$. III четверть;

4) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$. III четверть; 5) $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$. II четверть;

6) $\alpha = 4,8$. IV четверть (см. п.8); 7) $\alpha = -1,31$. IV четверть (см. п.8);

8) $\alpha = -2,7$. Решение: поворот на угол α совпадает с поворотом на угол

$2\pi + \alpha = 2\pi - 2,7$. Т.к. $\pi < 2\pi - 2,7 < \frac{3\pi}{2}$, то точка находится в III четверти.

443. 1)–5) Аналогично 6).

6) $\pi - \alpha$. Решение: по условию $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, значит $-\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0$, откуда

$\pi - \frac{\pi}{2} < \pi - \alpha < \pi$, т.е. α – угол II четверти. Ответ: II четверть.

444. 1), 3)–6) Аналогично 2).

2) $\alpha = -\frac{33\pi}{7}$. Решение: $-\frac{33\pi}{7} = -6\pi + \frac{9\pi}{7}$, поэтому знак $\sin \alpha$ совпадает

со знаком $\sin \frac{9\pi}{7}$. $\pi < \frac{9\pi}{7} < \frac{3\pi}{2}$, поэтому знак минус. Ответ: минус.

445. Аналогично задаче 444.

446. 1)–5) Аналогично 6).

6) $\alpha = 283^\circ$. Решение: $270^\circ < 283^\circ < 360^\circ$, т.е. α – угол IV четверти, поэтому $\operatorname{tg} \alpha < 0$. Ответ: минус.

447. 1), 2) Аналогично 3) и 4).

3) $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$. Решение: $\frac{3\pi}{2} < \frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$, т.е. α – угол IV четверти,

поэтому $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$ и $\operatorname{tg} \alpha < 0$. Ответ: минус, плюс, минус.

4) $2\pi < \alpha < 2,5\pi$. Решение: синус, косинус и тангенс α совпадают с синусом, косинусом и тангенсом $\alpha - 2\pi$, причем $0 < \alpha - 2\pi < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ положительны. Ответ: плюс, плюс, плюс.

448. Указание: аналогично задаче 447. Ответы: 1) $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$;

3) $\frac{\pi}{2} < 2\pi - 3,4 < \pi$; 4) $\frac{3\pi}{2} < 2\pi - 1,3 < 2\pi$.

449. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Решение: т.к. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0$, поэтому

$0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}$, значит $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0$. Ответ: знак плюс.

2)–4) Аналогично 1).

450. Указание: аналогично задаче 447. 1) $\pi < \alpha - 2\pi < \frac{4\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$;

2) $\frac{\pi}{2} < \alpha - 2\pi < \frac{3\pi}{4} < \pi$.

451. Указание: знаки синуса и косинуса совпадают в I и III четвертях и различны во II и IV четвертях.

452. 1) $\sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{3\pi}{4}$. Решение: $\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4} < \pi$, поэтому $\sin \frac{2\pi}{3} > 0$ и

$\sin \frac{3\pi}{4} > 0$, значит $\sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{3\pi}{4} > 0$. Ответ: плюс.

2), 3) Аналогично 1).

453. 1) $\sin 0,7$ и $\sin 4$. Решение: $\sin 0,7 > 0$, т.к. $0 < 0,7 < \frac{\pi}{2}$. А $\sin 4 < 0$, т.к.

$\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$. Поэтому $\sin 0,7 > \sin 4$. Ответ: $\sin 0,7 > \sin 4$.

2) Аналогично 1).

454. 1) $\sin(5\pi + x) = 1$. Решение: $5\pi + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi(2k - 5)$.

Заметим, что когда k «пробегает» все целые числа, $2k - 5$ «пробегает» все целые нечетные числа. Поэтому получаем ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi(2k + 1), k \in \mathbf{Z}$.

2)–4) Аналогично 1).

455. 1) $\sin \alpha + \cos \alpha = -1,4$. Решение: т.к. $-1 \leq \sin \alpha; \cos \alpha \leq 1$, то равенство возможно только если $\sin \alpha < 0$ и $\cos \alpha < 0$, т.е. α точка третьей четверти. Ответ: III четверть.

2) Указание: аналогично 1), необходимо $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha < 0$.

§25. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{откуда: } \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

$$\operatorname{tga} \cdot \operatorname{ctga} = 1$$

$$\text{откуда: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (\text{при } \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z})$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\text{при } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z})$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\text{при } \alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z})$$

456. Аналогично задаче 336.

457. 1) Решение: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} \neq 1$. Ответ: нет, не могут.

2) Решение: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$. Ответ: да, могут.

3) Решение: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{3}{25} + \frac{23}{25} \neq 1$. Ответ: нет, не могут.

4) Решение: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0,04 + 0,64 \neq 1$. Ответ: нет, не могут.

458. 1) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Решение: по условию α – точка II четверти,

там синус положительный. Значит $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{3}{4}$. Ответ: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}$.

2) Аналогично 1).

459. Аналогично задаче 458.

460. Указание: при фиксированном значении синуса (косинуса), не равного ± 1 , косинус (синус) может принимать два значения.

461. 1) $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$. Решение: $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \pm \frac{\sqrt{24}}{5}$.

Если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$, то $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$, значит, такие равенства могут выполняться одновременно. Ответ: да.

2) Аналогично 1).

462. Указание: т.к. α – угол прямоугольного треугольника, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Аналогично задаче 458.

$$463. 1) \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{0,5 + 2}{0,5 - 2} = -\frac{25}{15} = -\frac{5}{3};$$

$$2) \frac{\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3};$$

$$3) \frac{\frac{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha}{3 \sin \alpha} - \frac{3 \cos \alpha}{5 \cos \alpha}} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha + 3}{3 \operatorname{tg} \alpha - 5} = \frac{4 + 3}{6 - 5} = 7;$$

$$4) \frac{\frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} (\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha)} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 2}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \frac{4 + 2}{4 - 1} = 2;$$

464. 1) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$, откуда

$$1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{3}{8}. \quad \text{Ответ: } -\frac{3}{8}.$$

2) Указание: $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)$, воспользуйтесь результатом п. 1).

§26. Тригонометрические тождества

465. 1) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$. Решение: преобразуем левую часть:

$$(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha, \quad \text{ч.т.д.}$$

2) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = \cos^2 \alpha$. Решение: преобразуем левую часть:

$$(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha, \quad \text{ч.т.д.}$$

3) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$. Решение: преобразуем левую часть:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad \text{ч.т.д.}$$

4) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$. Решение: преобразуем левую часть:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \operatorname{ctg}^2 \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

5) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = 1$. Решение: т.к. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, то получаем основное тригонометрическое тождество: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, ч.т.д.

6) Указание: воспользуйтесь формулой $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

$$466. 1) \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 2 \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2 \sin \alpha = \sin \alpha - 2 \sin \alpha = -\sin \alpha;$$

$$2) \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha - \cos \alpha = 0;$$

$$3) \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{1 + \cos \alpha} = 1 - \cos \alpha;$$

$$4) \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{1 - \sin \alpha} = 1 + \sin \alpha.$$

$$467. 1) \frac{\sin^2 \alpha - 1}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{-\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -\operatorname{tg}^2 \alpha = -\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} = -1.$$

$$2) \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = (\sqrt{3})^2 = 3.$$

$$3) \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha = (\sqrt{3})^2 = 3.$$

$$4) \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 + (\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 2.$$

468. 1) $(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 1$. Решение: воспользуемся формулой

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ тогда } (1 - \sin^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1, \text{ ч.т.д.}$$

2) Указание: воспользуйтесь формулой $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

$$469. 1) (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha - 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 1 = 0.$$

$$2) 1 - \sin^2 \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 - 1 = 0.$$

$$3) 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}.$$

$$4) \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

470. 1) $(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha) = 1 - \cos^2 2\alpha = \sin^2 2\alpha$, ч.т.д.

$$2) \frac{\sin \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha - 1}{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{1 - \sin \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{1 - \sin \alpha}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} = -\frac{1}{1 + \sin \alpha}, \text{ ч.т.д.}$$

$$3) \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot 1, \text{ ч.т.д.}$$

$$4) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \\ = \sin^4 \alpha - 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$5) \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + (1 + \cos \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha + 1}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \\ = \frac{2 + 2 \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}, \text{ ч.т.д.}$$

6) Решение: необходимо доказать, что $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = 0$

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} = 0, \text{ ч.т.д.}$$

$$7) \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \text{ ч.т.д.}$$

8) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$. Решение: рассмотрим разность

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \\ = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0, \text{ ч.т.д.}$$

471. Решение: $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$,

$$\text{таким образом, } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1 - 0,6^2}{2} = 0,5 - 0,18 = 0,32.$$

472. Аналогично задаче 464.

473. Указание: возведите исходное равенство в квадрат и воспользуйтесь тем, что $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.

474. 1) $2 \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Решение: т.к. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то $2 \sin x = 0$, $\sin x = 0$. Откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 2 = 0$. Решение: преобразуем левую часть уравнения $2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x - 2 = \cos^2 x$, т.е. $\cos^2 x = 0$, $\cos x = 0$. Откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) Указание: уравнение равносильно $3(\cos^2 x + \sin^2 x) - 3 = 2 \sin x$, откуда $2 \sin x = 0$.

4) Указание: рассмотрите разность левой и правой части и преобразуйте к виду $\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0$, откуда $\sin x = 1$.

§27. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$.

Формулы перехода:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

$$475. 1) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{7}{4};$$

$$2) \frac{1 + \operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1 + \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}}{1 + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 + 3} = \frac{1}{3};$$

$$3) 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{4} =$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2} = \frac{-3\sqrt{3} + 1}{2};$$

$$4) \cos(-\pi) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\cos \pi - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1 - 0 - 1 - 1 = -3;$$

$$5) \frac{3 - \sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{2\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2};$$

$$6) 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3 + 7,5\operatorname{tg}(-\pi) + \frac{1}{8}\cos\frac{3}{2}\pi = -1 + 3 - 0 + 0 = 2.$$

$$476. 1) \operatorname{tg}(-\alpha)\cos \alpha + \sin \alpha = -\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha + \sin \alpha = -\sin \alpha + \sin \alpha = 0;$$

$$2) \cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha (-\sin \alpha) = \cos \alpha + \cos \alpha = 2 \cos \alpha;$$

$$3) \frac{\cos(-\alpha) + \sin(-\alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha + \sin \alpha};$$

$$4) \operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha) + \cos^2(-\alpha) + \sin^2\alpha = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 + 1 = 2.$$

$$477. 1) \frac{2 - \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2 - \sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{3}}{2\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}} = \frac{2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 4.$$

$$2) \sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = -\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} + 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + 4\cos\frac{3}{2}\pi = \frac{1}{2}.$$

$$478. 1) \frac{\sin^3(-\alpha) + \cos^3(-\alpha)}{1 - \sin(-\alpha)\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{1 + \sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha.$$

$$2) \frac{1 - (\sin\alpha + \cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)} = \frac{1 - \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = -2\cos\alpha.$$

$$479. 1) \cos\alpha\sin(6\pi - \alpha) \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2(-\alpha)) = \cos\alpha\sin(-\alpha)(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) =$$

$$= -\cos\alpha\sin\alpha \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(-\alpha), \text{ ч.т.д.}$$

$$2) \frac{1 - \sin^2(-\alpha)}{\cos(4\pi - \alpha)} \cdot \frac{\sin(\alpha - 2\pi)}{1 - \cos^2(-\alpha)} = \frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha,$$

ч.т.д.

480. 1) Указание: данное уравнение равносильно $\sin x = -1$;

2) Указание: данное уравнение равносильно $\cos 2x = 0$;

3) Указание: данное уравнение равносильно $\cos 2x = 1$;

4) Указание: данное уравнение равносильно $\sin 2x = 0$;

5) $\cos^2(-x) + \sin(-x) = 2 - \sin^2 x$. Решение:

$$\cos^2(-x) + \sin(-x) - 2 + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x - \sin x - 2 = -\sin x - 1, \text{ т.е.}$$

$$-\sin x - 1 = 0, \sin x = -1, \text{ откуда } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k. \text{ Ответ: } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

6) $1 - \sin^2(-x) + \cos(4\pi - x) = \cos(x - 2\pi)$. Решение:

$$1 - \sin^2(-x) + \cos(4\pi - x) = 1 - \sin^2 x + \cos x, \cos(x - 2\pi) = \cos x. \text{ То есть}$$

$$1 - \sin^2 x + \cos x = \cos x, 1 - \sin^2 x = 0, \cos^2 x = 0 \text{ откуда } \cos x = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}. \text{ Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

§28. Формулы сложения

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}; \quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$481. 1) \cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = \cos 90^\circ \cos 45^\circ - \sin 90^\circ \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2) \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = \cos 90^\circ \cos 30^\circ - \sin 90^\circ \sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$3) \cos 150^\circ = \cos(90^\circ + 60^\circ) = \cos 90^\circ \cos 60^\circ - \sin 90^\circ \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$4) \cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = \cos 180^\circ \cos 60^\circ - \sin 180^\circ \sin 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

$$482. 1) \cos 57^\circ 30' \cos 27^\circ 30' + \sin 57^\circ 30' \sin 27^\circ 30' = \cos(57^\circ 30' - 27^\circ 30') = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2) \cos 19^\circ 30' \cos 25^\circ 30' + \sin 19^\circ 30' \sin 25^\circ 30' = \cos(19^\circ 30' + 25^\circ 30') = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3) \cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{11\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} \sin \frac{11\pi}{9} = \cos\left(\frac{7\pi}{9} + \frac{11\pi}{9}\right) = \cos 2\pi = 1;$$

$$4) \cos \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} = \cos\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = \cos \pi = -1.$$

$$483. 1) \text{Решение: т.к. } \alpha - \text{ точка I четверти, то } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2 \cdot 3} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - 3}{6}. \text{ Ответ: } \frac{\sqrt{6} - 3}{6}.$$

$$2) \text{Решение: т.к. } \alpha - \text{ точка II четверти, то } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 2} + \frac{2(\sqrt{2})^2}{3 \cdot 2} = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}. \text{ Ответ: } \frac{4 - \sqrt{2}}{6}.$$

$$484. 1) \cos 3\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha = \cos(3\alpha + \alpha) = \cos 4\alpha.$$

$$2) \cos 5\beta \cos 2\beta + \sin 5\beta \sin 2\beta = \cos(5\beta - 2\beta) = \cos 3\beta.$$

$$3) \cos\left(\frac{\pi}{7} + \alpha\right) \cos\left(\frac{5\pi}{14} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7} + \alpha\right) \sin\left(\frac{5\pi}{14} - \alpha\right) =$$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{7} + \alpha\right) + \left(\frac{5\pi}{14} - \alpha\right)\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

$$\begin{aligned} 4) \cos\left(\frac{7\pi}{5} + \alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{5} + \alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right) = \\ = \cos\left(\left(\frac{7\pi}{5} + \alpha\right) - \left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right)\right) = \cos\pi = -1. \end{aligned}$$

$$485. 1) \sin 73^\circ \cos 17^\circ + \cos 73^\circ \sin 17^\circ = \sin(73^\circ + 17^\circ) = \sin 90^\circ = 1;$$

$$2) \sin 73^\circ \cos 13^\circ - \cos 73^\circ \sin 13^\circ = \sin(73^\circ - 13^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3) \sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1;$$

$$4) \sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$486. 1) \text{ Решение: т.к. } \alpha - \text{ точка III четверти, то } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{4}{5}.$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{6} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{4\sqrt{3}}{5 \cdot 2} - \frac{3}{5 \cdot 2} = -\frac{4\sqrt{3} + 3}{10}. \text{ Ответ: } -\frac{4\sqrt{3} + 3}{10}.$$

$$2) \text{ Решение: т.к. } \alpha - \text{ точка II четверти, то } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{14}}{2 \cdot 3} - \frac{2}{2 \cdot 3} = -\frac{\sqrt{14} + 2}{6}. \text{ Ответ: } -\frac{\sqrt{14} + 2}{6}$$

$$487. 1) \sin(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta) = \sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos \beta = \\ = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta = \cos \alpha \sin \beta;$$

$$2) \cos(-\alpha)\sin(-\beta) - \sin(\alpha - \beta) = -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = -\sin \alpha \cos \beta$$

$$\begin{aligned} 3) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \sin(\alpha - \beta) &= \left(\cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha\right) \times \\ \times \left(\sin \frac{\pi}{2} \cos \beta - \cos \frac{\pi}{2} \sin \beta\right) - \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) = \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \sin(\alpha + \beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta) &= \sin(\alpha + \beta) - \left(\sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha\right) \times \\ \times \sin \beta &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

$$488. \text{ Решение: т.к. } \alpha - \text{ точка IV четверти, то } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5}. \text{ Анало-}$$

$$\text{гично } \cos \beta = \frac{15}{17}. \text{ Т.е. } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{4 \cdot 15}{5 \cdot 17} - \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 17} = \frac{84}{85},$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{17} + \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{17} = \frac{36}{85}. \text{ Ответ: } \frac{84}{85}, \frac{36}{85}.$$

489. Аналогично задаче 488.

490. Решение: аналогично задаче 488 найдем $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\sin \beta = -\frac{15}{17}$, отку-

$$\text{да } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3} \text{ и } \operatorname{tg} \beta = -\frac{15}{8}. \text{ Тогда } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{15}{8}}{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{15}{8}} = \frac{77}{36}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{77}{36}.$$

491. 1) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta = 2 \sin \alpha \sin \beta$

$$\begin{aligned} 2) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha &= \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha\right) \times \\ &\times \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha\right) + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = \frac{2}{4} (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{2} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$3) \cos 3\alpha + \sin \alpha \sin 2\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) + \sin \alpha \sin 2\alpha =$$

$$= \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha + \sin \alpha \sin 2\alpha = \cos \alpha \cos 2\alpha$$

$$4) \cos 2\alpha - \cos \alpha \cos 3\alpha = \cos 2\alpha - (\cos \alpha \cos 3\alpha + \sin \alpha \sin 3\alpha) + \sin \alpha \sin 3\alpha =$$

$$= \cos 2\alpha - \cos 2\alpha + \sin \alpha \sin 3\alpha = \sin \alpha \sin 3\alpha.$$

$$492. 1) \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}, \text{ ч.т.д.}$$

$$2) \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1} = \frac{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} + 1}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} - 1} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}, \text{ ч.т.д.}$$

$$3) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha), \text{ ч.т.д.}$$

$$4) \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{tg} \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$5) \text{Решение: преобразуем правую часть: } \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) = \\ = \frac{1}{2}((\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)) = \cos \alpha \cos \beta, \text{ ч.т.д.}$$

$$6) \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = \frac{1}{2}(\cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta) = \sin \alpha \sin \beta.$$

$$493. 1) \frac{\operatorname{tg} 29^\circ + \operatorname{tg} 31^\circ}{1 - \operatorname{tg} 29^\circ \operatorname{tg} 31^\circ} = \operatorname{tg}(29^\circ + 31^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$2) \frac{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{16} - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{16}}{1 - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{16} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{16}} = \operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{16} - \frac{3\pi}{16} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1;$$

$$3) \frac{1 + \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 55^\circ}{\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ} = (\operatorname{tg}(55^\circ - 10^\circ))^{-1} = \operatorname{ctg}(45^\circ) = 1;$$

$$4) \frac{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \operatorname{tg} 17^\circ}{\operatorname{tg} 17^\circ + \operatorname{tg} 13^\circ} = (\operatorname{tg}(17^\circ + 13^\circ))^{-1} = (\operatorname{tg} 30^\circ)^{-1} = \sqrt{3}.$$

$$494. 1) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \left(-\frac{3}{4} + \frac{12}{5} \right) : \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{5} \right) = \frac{33}{56};$$

$$2) \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = (\operatorname{tg}(\alpha - \beta))^{-1} = \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \right)^{-1} = \left(1 - \frac{3}{4} \right) : \left(\frac{3}{4} + 1 \right) = \frac{1}{7}.$$

$$495. \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)} = \frac{\left(\sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha\right) - \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right)}{\left(\sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha\right) + \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$496. 1) \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin 3\alpha;$$

$$2) \sin 5\beta \cos 3\beta - \sin 3\beta \cos 5\beta = \sin(5\beta - 3\beta) = \sin 2\beta.$$

$$497. 1) \cos 6x \cos 5x + \sin 6x \sin 5x = -1. \text{ Решение: преобразуем левую часть:}$$

$\cos 6x \cos 5x + \sin 6x \sin 5x = \cos(6x - 5x) = \cos x$. Т.е. $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: преобразуйте $\cos 3x \cos 5x - \sin 5x \sin 3x = \cos(3x + 5x) = \cos 8x$.

3) $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos x = 1$. Решение: преобразуем левую часть уравнения:

$$\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos x = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) - \cos x = -\sin x;$$

$-\sin x = 1$, $\sin x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) Указание: преобразуйте левую часть уравнения:

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \sin \frac{x}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2} \right) + \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2}.$$

§29. Синус, косинус и тангенс двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

498. 1) $\sin 48^\circ = 2 \sin 24^\circ \cos 24^\circ$; 2) $\cos 164^\circ = \cos^2 82^\circ - \sin^2 82^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 92^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} 46^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 46^\circ}$; 4) $\sin \frac{4\pi}{3} = 2 \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3}$;

5) $\sin \frac{5\pi}{3} = \cos^2 \frac{5\pi}{6} - \sin^2 \frac{5\pi}{6}$.

499. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\beta}{2}\right)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos^2\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$;

5) $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$;

6) $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

$$500. 1) 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$2) \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3) \frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$4) (\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2 = \cos^2 75^\circ - 2 \cos 75^\circ \sin 75^\circ + \sin^2 75^\circ = 1 - \sin 150^\circ = 0,5.$$

$$501. 1) 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3) \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1;$$

$$4) \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + 2 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} \right) = -1.$$

$$502. 1) 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2};$$

$$2) \cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3) \frac{6 \operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ} = 3 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ} = 3 \operatorname{tg} 150^\circ = \sqrt{3};$$

$$4) \frac{\operatorname{tg}^2 22^\circ 30' - 1}{\operatorname{tg} 22^\circ 30'} = -2 \cdot \left(\frac{2 \operatorname{tg} 22^\circ 30'}{\operatorname{tg}^2 22^\circ 30' - 1} \right)^{-1} = \frac{-2}{\operatorname{tg} 45^\circ} = -2;$$

$$503. 1) \text{Решение: т.к. } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \text{ то } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}. \text{ Поэтому}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}. \text{ Ответ: } -\frac{24}{25}.$$

2) Аналогично 1).

$$504. 1) \text{Решение: } \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}, \text{ откуда находим}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}. \text{ Ответ: } \frac{7}{25}.$$

2) Аналогично 1).

505. Указание: подставьте значение тангенса в формулу двойного угла.

$$506. 1) 2 \cos 40^\circ \cos 50^\circ = 2 \sin 50^\circ \cos 50^\circ = \sin 100^\circ;$$

$$2) 2 \sin 25^\circ \sin 65^\circ = 2 \sin 25^\circ \cos 25^\circ = \sin 50^\circ;$$

$$3) \sin 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 \sin \alpha \cos \alpha + 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1;$$

$$4) \cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha.$$

$$507. 1) \frac{\sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = 1;$$

$$2) \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha}{(1 - \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

$$508. 1) (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1 = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha;$$

$$2) (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - \sin 2\alpha;$$

$$3) \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha;$$

$$4) 2 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \text{ ч.т.д.}$$

$$509. 1) \text{ Решение: т.к. } \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + \sin 2\alpha, \text{ то}$$

гда $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$. Ответ: $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$.

$$2) \text{ Решение: т.к. } \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - \sin 2\alpha, \text{ то}$$

гда $\sin 2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Ответ: $\sin 2\alpha = \frac{8}{9}$.

$$510. 1) \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha - 1$$

$$2) \frac{\sin 2\alpha - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\sin \alpha - 1)}{\sin \alpha (1 - \sin \alpha)} = -\frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} = -2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (1 + (2 \cos^2 \alpha - 1)) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha.$$

$$4) \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + (2 \cos^2 \alpha - 1) + 2 \sin \alpha \cos \alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha =$$

$$= \frac{2 \sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \text{ ч.т.д.}$$

$$5) \frac{(1-2\cos^2\alpha)(2\sin^2\alpha-1)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}{(2\sin\alpha\cos\alpha)^2} = \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = \operatorname{ctg}^2 2\alpha.$$

$$6) 1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \\ = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \sin\alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$7) \frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{1 + \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1} = \frac{\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha(1+2\cos\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha.$$

$$511. \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)} = \frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}.$$

Решение: преобразуем отдельно левую и правую часть. Левая часть:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)} = \\ = \frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)} - \frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)} = \frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)} = \\ = \frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\cos\alpha\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2(\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin 2\alpha}.$$

$$\text{Правая часть: } \frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha} = \frac{2(\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin 2\alpha}.$$

Т.е. левая и правая части совпадают. Что и требовалось доказать.

512. 1) $\sin 2x - 2\cos x = 0$. Решение: преобразуем левую часть уравнения, получим $2\cos x(\sin x - 1) = 0$. Т.е. $\cos x = 0$ или $\sin x = 1$. Первое уравнение является следствием второго (в силу основного тригонометрического тождества), поэтому достаточно решить только первое уравнение.

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k. \quad \text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2) Указание: $\cos 2x + \sin^2 x = \cos^2 x$, т.е. данное уравнение равносильно уравнению $\sin^2 x = 0$.

3) Указание: рассмотрим разность: $4\cos x - \sin 2x = 2\cos x(2 - \sin x) = 0$, откуда $\cos x = 0$ или $\sin x = 2$. Второе уравнение не имеет решений.

4) Указание: рассмотрим разность: $\sin^2 x + \cos 2x = \cos^2 x$.

5) $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0$. Решение: домножим обе части уравнения на 2:

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 1 = 0; \sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k. \text{ Ответ: } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

6) Указание: рассмотрите разность левой и правой части уравнения, тогда

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x.$$

§30. Синус, косинус и тангенс половинного угла

Формулы половинного угла:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$513. 1) \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2}; \quad 2) 2 \cos^2 \frac{1}{4} = \frac{1 + \cos \frac{1}{2}}{2};$$

$$3) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)}{2}; \quad 4) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right)}{2}.$$

$$514. 1) 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 = 2 \cdot \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} - 1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2) 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \left(1 - \cos \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3) \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \sin^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + (1 - \cos 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1;$$

$$4) -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cos^2 15^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + (1 + \cos 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.$$

515. 1) $\sin \frac{\alpha}{2}$. Решение: т.к. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\sin \frac{\alpha}{2}$ —

положительное число. Тогда $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{0,2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2), 3) аналогично 1).

4) Указание: $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$, аналогично 1).

516. Указание: $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, кроме того $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, поэтому синус, косинус, тангенс и котангенс половинного угла положительные.

517. 1) Решение: $\sin 15^\circ > 0$. Поэтому: $\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} =$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{3})^2}{8}} = \frac{|1 - \sqrt{3}|}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

2) Решение: $\cos 15^\circ > 0$, т.е. $\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

3) Решение: $\operatorname{tg} 22^\circ 30' > 0$, поэтому: $\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} =$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

4) Решение: $\operatorname{ctg} 22^\circ 30' = \frac{1}{\operatorname{tg} 22^\circ 30'} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$ (см. п.3).

518. 1) $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right) : \left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$

2) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right) : \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$

3) $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha.$

4) $\frac{1 + \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{2 \cos^2 2\alpha}{2 \cos 2\alpha \sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha.$

$$5) \frac{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\cos \alpha + \sin \alpha} = 2 \cos \alpha.$$

$$6) (1 - \cos 2\alpha) \operatorname{ctg} \alpha = 2 \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha.$$

$$519. 1) 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cdot \frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{2} = 1 + \sin \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$2) 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cdot \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{2} = 1 - \sin \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$3) \frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{3 - 4 \cos 2\alpha + 2 \cos^2 2\alpha - 1}{3 + 4 \cos 2\alpha + 2 \cos^2 2\alpha - 1} = \frac{1 - 2 \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha} =$$

$$= \left(\frac{\cos 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha + 1} \right)^2 = \left(\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha - 1}{2 \cos^2 \alpha - 1 + 1} \right)^2 = \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^4 = \operatorname{tg}^4 \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$4) \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{2 \sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$520. 1) \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha} = 1, \text{ ч.т.д.}$$

$$2) \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

3) Решение: преобразуем левую часть:

$$\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}.$$

Теперь преобразуем правую часть:

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) : \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}, \text{ ч.т.д.}$$

4) Решение: преобразуем левую часть:

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}.$$

$$\text{Правая часть: } \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}, \text{ ч.т.д.}$$

$$\begin{aligned}
 521. \quad \sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha} &= \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} - \\
 &= \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \\
 &= \left|\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right| - \left|\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right|. \text{ Т.к. } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ то } 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}, \text{ поэтому} \\
 0 < \sin\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\alpha}{2}. \text{ Т.е. } \sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha} &= \left|\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right| - \left|\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right| = \\
 &= \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}, \text{ ч.т.д.}
 \end{aligned}$$

$$522. \quad \frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha - \operatorname{tg}2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} - \operatorname{tg}2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}2\alpha(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)}{\operatorname{tg}2\alpha(1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha)} = \cos 4\alpha.$$

523. 1) Указание: $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$, аналогично 2).

2) $1 + \cos x = 2\cos \frac{x}{2}$. Решение: преобразуем уравнение:

$$1 + \cos x - 2\cos \frac{x}{2} = 0, \quad 1 + 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 - 2\cos \frac{x}{2} = 0, \quad 2\cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - 1 \right) = 0. \text{ Т.е.}$$

$\cos \frac{x}{2} = 0$ или $\cos \frac{x}{2} = 1$. Из первого уравнения $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = \pi + 2\pi k$,

$k \in \mathbb{Z}$. Из второго уравнения $\frac{x}{2} = 2\pi n$; $x = 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (эта серия корней содержится в первой). Ответ: $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) Указание: $\sin\left(\frac{x}{4} - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{x}{4}\cos\frac{3\pi}{2} - \cos\frac{x}{4}\sin\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{x}{4}$. Аналогично 2).

4) Указание: $1 + \cos 8x = 2\cos^2 4x$. Аналогично 2).

5) $2\sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x = 1$. Решение: преобразуем уравнение:

$$\left(2\sin^2 \frac{x}{2} - 1\right) + \frac{1}{2}\sin 2x = 0, \quad -\cos x + \sin x \cos x = 0, \quad \cos x(\sin x - 1) = 0. \text{ От-}$$

куда $\cos x = 0$ или $\sin x = 1$. Первое уравнение следует из второго (в силу основного тригонометрического тождества), поэтому достаточно решить

только первое уравнение. Тогда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) Указание: аналогично 5), $2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$, $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$.

§31. Формулы приведения

Формулы приведения синуса:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha; \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha;$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha; \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha.$$

Формулы приведения косинуса:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha; \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha;$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha; \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Формулы приведения тангенса:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg} \alpha, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad \operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg} \alpha, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

524. 1) Решение: $\cos 75^\circ = \cos(90^\circ - \alpha)$, откуда $\alpha = 15^\circ$. Ответ: $\alpha = 15^\circ$

2) Решение: $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + \alpha)$, откуда $\alpha = 60^\circ$. Ответ: $\alpha = 60^\circ$.

3) Решение: $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - \alpha)$, откуда $\alpha = 30^\circ$. Ответ: $\alpha = 30^\circ$.

4) Решение: $\cos 310^\circ = \cos(270^\circ + \alpha)$, откуда $\alpha = 40^\circ$. Ответ: $\alpha = 40^\circ$.

5) Решение: $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin(\pi + \alpha)$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

6) Решение: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, откуда $\alpha = \frac{3\pi}{10}$. Ответ: $\alpha = \frac{3\pi}{10}$.

7) Решение: $\cos \frac{7\pi}{4} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

8) Решение: $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \alpha$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{6}$ – острый угол. Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

$$525. 1) \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3) \operatorname{ctg} 135^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ - 45^\circ) = \operatorname{ctg}(-45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1;$$

$$4) \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$5) \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$6) \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$7) \operatorname{ctg} 240^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ + 60^\circ) = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$8) \sin 315^\circ = \sin(270^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$526. 1) \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1;$$

$$2) \sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$3) \cos \frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$4) \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$5) \sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = \sin\left(-2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$6) \cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(-2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$7) \operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3};$$

$$8) \operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\left(-2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

$$527. 1) \text{ Решение: } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ поэтому:}$$

$$\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - \cos \alpha}{-\cos \alpha} = 1.$$

$$2) \frac{\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\sin \alpha - \sin \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} = -1.$$

$$528. 1) \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\operatorname{ctg}(-\alpha)} \cdot \frac{-\operatorname{ctg} \alpha}{-\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$2) \frac{\sin^2(\pi + \alpha) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

$$529. 1) \cos 750^\circ = \cos(720^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \sin 1140^\circ = \sin(1080^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3) \operatorname{tg} 405^\circ = \operatorname{tg}(360^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1;$$

$$4) \cos 840^\circ = \cos(720^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$5) \sin \frac{47\pi}{6} = \sin\left(8\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$6) \operatorname{tg} \frac{25\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(6\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1;$$

$$7) \operatorname{ctg} \frac{27\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(7\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -1;$$

$$8) \cos \frac{21\pi}{4} = \cos\left(4\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = \cos \frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$530. 1) \cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \operatorname{ctg} 1125^\circ =$$

$$= \cos(720^\circ - 90^\circ) - \sin(1440^\circ + 30^\circ) - \operatorname{ctg}(1080^\circ + 45^\circ) =$$

$$= \cos(2 \cdot 360^\circ - 90^\circ) - \sin(4 \cdot 360^\circ + 30^\circ) - \operatorname{ctg}(6 \cdot 360^\circ + 45^\circ) =$$

$$= \cos 90^\circ - \sin 30^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ = -0,5 - 1 = -1,5.$$

$$2) \operatorname{tg} 1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ = 0 - \sin(540^\circ - 45^\circ) + \cos(900^\circ + 45^\circ) =$$

$$= -\sin 45^\circ - \cos 45^\circ = -\sqrt{2}.$$

$$3) 3 \cos 3660^\circ + \sin(-1560^\circ) + \cos(-450^\circ) = 3 \cos(3600^\circ + 60^\circ) -$$

$$-\sin(-1440^\circ - 120^\circ) + \cos(-360^\circ - 90^\circ) = 3 \cos 60^\circ - \sin 120^\circ + \cos 90^\circ =$$

$$= \frac{3}{2} - \sin(90^\circ + 30^\circ) + 0 = \frac{3}{2} - \cos 30^\circ = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

$$4) \cos 4455^\circ - \cos(-945^\circ) + \operatorname{tg} 1035^\circ - \operatorname{ctg}(-1500^\circ) = \cos(4500^\circ - 45^\circ) -$$

$$-\cos(-900^\circ - 45^\circ) + \operatorname{tg}(1080^\circ - 45^\circ) - \operatorname{ctg}(-1440^\circ - 60^\circ) =$$

$$= -\cos 45^\circ + \cos 45^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{ctg} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}.$$

$$531. 1) \cos \frac{23\pi}{4} - \sin \frac{15\pi}{4} - \operatorname{ctg} \left(-\frac{11\pi}{2} \right) = \cos \left(6\pi - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(4\pi - \frac{\pi}{4} \right) -$$

$$-\operatorname{ctg} \left(-6\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}.$$

$$2) \sin \frac{25\pi}{3} - \cos \left(-\frac{17\pi}{2} \right) - \operatorname{tg} \frac{10\pi}{3} = \sin \left(8\pi + \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(-8\pi - \frac{\pi}{2} \right) -$$

$$-\operatorname{tg} \left(4\pi - \frac{2\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$3) \sin(-7\pi) - 2 \cos \frac{31\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = 0 - 2 \cos \left(10\pi + \frac{\pi}{3} \right) - \operatorname{tg} \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= -2 \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1 + 1 = 0.$$

$$4) \cos(-9\pi) + 2 \sin \left(-\frac{49\pi}{6} \right) - \operatorname{ctg} \left(-\frac{21\pi}{4} \right) = -1 - 2 \sin \left(-8\pi - \frac{\pi}{6} \right) -$$

$$-\operatorname{ctg} \left(-5\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -1 - 2 \sin \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -1 - 1 + 1 = -1.$$

$$532. 1) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \\ = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 0, \text{ ч.т.д.}$$

$$2) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\right) = \\ = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = 0, \text{ ч.т.д.}$$

$$3) \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{-\cos\alpha \cdot (-\operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha \cdot (-\operatorname{ctg}\alpha)} = -\cos\alpha \operatorname{tg}\alpha = -\sin\alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$533. 1) \sin\left(\frac{7\pi}{6} + \alpha\right) = \sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right), \text{ ч.т.д.}$$

$$2) \sin\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi - \left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right), \text{ ч.т.д.}$$

$$3) \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\pi + \left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right), \text{ ч.т.д.}$$

$$4) \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-2\pi + \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right), \text{ ч.т.д.}$$

534. Решение: обозначим углы треугольника через α, β, γ . Тогда $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, поэтому $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\pi - \gamma) = \sin\gamma$, ч.т.д.

535. 1) Указание: уравнение равносильно $\sin x = 1$.

2) Указание: уравнение равносильно $\cos x = -1$.

3) Указание: уравнение равносильно $\cos x = 0$.

4) Указание: уравнение равносильно $\cos x = -1$.

5) $\sin(2x + 3\pi)\sin\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin 3x \cos 2x = -1$. Решение: преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin(2x + 3\pi)\sin\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin 3x \cos 2x =$$

$$= -\sin 2x \cos 3x - \sin 3x \cos 2x = -\sin(3x + 2x) = -\sin 5x. \text{ Т.е. } \sin 5x = 1, \text{ от-}$$

куда $5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$.

6) Аналогично 5).

536. Решение: пусть β – данный угол, тогда существует $k \in \mathbf{Z}$, такое, что

$0 < \beta + \frac{\pi k}{2} < \frac{\pi}{2}$. Обозначим $\alpha = \beta + \frac{\pi k}{2}$. Тогда синус, косинус или тан-

генс β по формулам приведения вычисляется через синус, косинус или

тангенс α . Но $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, $\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$.

Т.е. значение синуса, косинуса и тангенса β можно вычислить через зна-

чение синуса, косинуса или тангенса $\frac{\alpha}{2}$, причем $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$, ч.т.д.

§32. Сумма и разность синусов. Сумма, разность косинусов

Формулы суммы и разности:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\begin{aligned} 537. 1) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) &= 2 \sin \frac{\frac{\pi}{3} + \alpha + \frac{\pi}{3} - \alpha}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{3} + \alpha - \frac{\pi}{3} + \alpha}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha = \sqrt{3} \cos \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right) &= -2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} - \beta + \frac{\pi}{4} + \beta}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{4} - \beta - \frac{\pi}{4} - \beta}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \beta = \sqrt{2} \sin \beta. \end{aligned}$$

$$3) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \left(\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) \left(\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha.$$

$$4) \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right) \left(\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2 \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha.$$

538. 1) $\cos 105^\circ + \cos 75^\circ = 2 \cos 90^\circ \cos 15^\circ = 0$;

2) $\sin 105^\circ - \sin 75^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 90^\circ = 0$;

3) $\cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12} = 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} = -2 \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

5) $\sin \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

6) $\sin 105^\circ - \sin 165^\circ = 2 \sin 135^\circ \cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

539. 1) $1 + 2 \sin \alpha = 2 \left(\frac{1}{2} + \sin \alpha \right) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{6} + \sin \alpha \right) = 4 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12} \right)$;

2) $1 - 2 \sin \alpha = 2 \left(\frac{1}{2} - \sin \alpha \right) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{6} - \sin \alpha \right) = 4 \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2} \right)$;

3) $1 + 2 \cos \alpha = 2 \left(\frac{1}{2} + \cos \alpha \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \right) = 4 \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$.

4) Указание: $1 = \sin \frac{\pi}{2}$.

540. 1) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + 3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha - 3\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + 3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha - 3\alpha}{2}} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$, ч.т.д.

2) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \frac{2 \sin 3\alpha \cos(-\alpha)}{-2 \cos 3\alpha \sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$, ч.т.д.

541. 1) $\frac{2(\cos \alpha + \cos 3\alpha)}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{4 \cos 2\alpha \cos(-\alpha)}{\sin 2\alpha + \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{4 \cos 2\alpha \cos \alpha}{\sin 2\alpha + 2 \sin 3\alpha \cos \alpha} =$

$$\frac{4 \cos 2\alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin 3\alpha \cos \alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\cos \alpha}.$$

$$2) \frac{1 + \sin \alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1} = \frac{(1 - \cos 2\alpha) + (\sin \alpha - \sin 3\alpha)}{(2 \sin^2 \alpha - 1) + \sin \alpha} =$$

$$\frac{2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \frac{\alpha - 3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha + 3\alpha}{2}}{-\cos 2\alpha + \sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (\sin \alpha - \cos 2\alpha)}{-\cos 2\alpha + \sin \alpha} = -2 \sin \alpha.$$

$$542. 1) \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + \sin 2\alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \sin 2\alpha =$$

$$= \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 2\alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha \right) = \sqrt{2} \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4} \right), \text{ ч.т.д.}$$

$$2) \text{ Указание: } \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) = 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos \alpha.$$

$$3) \text{ Указание: аналогично задаче 541 п.2). } 1 - 2 \sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha.$$

$$543. 1) \cos 22^\circ + \cos 24^\circ + \cos 26^\circ + \cos 28^\circ = (\cos 22^\circ + \cos 28^\circ) + (\cos 24^\circ + \cos 26^\circ) =$$

$$2 \cos 25^\circ \cos 3^\circ + 2 \cos 25^\circ \cos 1^\circ = 2 \cos 25^\circ (\cos 3^\circ + \cos 1^\circ) = 4 \cos 25^\circ \cos 2^\circ \cos 1^\circ.$$

$$2) \text{ Указание: } \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{6} = \left(\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - \cos \frac{\pi}{6} =$$

$$2 \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cos \frac{\pi}{6} \left(\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{3} \right), \text{ воспользуйтесь формулой разности косинусов. Аналогично 1).}$$

$$544. \text{ Указание: } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

$$545. 1) 1 - \cos \alpha + \sin \alpha = 1 - \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha \right) = 1 - \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \right) = 2\sqrt{2} \sin \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = 2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$2) \text{ Аналогично 1).}$$

3) Аналогично 4).

$$4) \text{ Решение: см. задачу 544: } 1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4} \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos \alpha}, \text{ кроме}$$

$$\text{того, } \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right), \text{ поэтому}$$

$$\begin{aligned} 1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos \alpha} + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos \alpha} (1 + \cos \alpha) = \\ &= \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos \alpha} \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Упражнения к главе V

546. 1), 2) Аналогично задаче 458.

$$3) \text{ Решение: } |\sin \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \text{ Т.к. } \pi < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \sin \alpha > 0, \text{ зна-}$$

$$\text{чит } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \text{ Ответ: } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

4) Аналогично 3).

$$547. 1) 2 \sin(\pi - \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 3 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2 = 2 \sin \alpha \sin \alpha + 3 \cos^2 \alpha - 2 = \cos^2 \alpha$$

$$2) \frac{\sin(\pi + \alpha) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{-\sin \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

$$548. 1) \sin \frac{47\pi}{6} = \sin\left(8\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -0,5.$$

2)–4) Аналогично 1).

549. 1)–3) Аналогично 4).

$$\begin{aligned} 4) \cos(-945^\circ) + \operatorname{tg} 1035^\circ &= \cos 945^\circ + \operatorname{tg} 1035^\circ = \\ &= \cos(720^\circ + 225^\circ) + \operatorname{tg}(1080^\circ - 45^\circ) = \cos 225^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 550. 1) \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha. \end{aligned}$$

2) Аналогично 1).

551. Указание: воспользуйтесь формулами приведения (см. задачу 532), а затем сложения.

552. Указание: см. задачу 544, представьте тангенс как отношение синуса к косинусу.

$$\begin{aligned} 553. 1) 2 \sin 6\alpha \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 3\alpha\right) - \sin 6\alpha &= \sin 6\alpha \left(2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 3\alpha\right) - 1 \right) = \\ &= \sin 6\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} + 6\alpha\right) = -\sin^2 6\alpha = -\sin^2 \frac{5\pi}{4} = -0,5. \end{aligned}$$

2) Аналогично 1).

554. Указание: воспользуйтесь формулой косинуса двойного угла.

555. 1) Аналогично 2).

2) Решение: преобразуем правую часть:

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}. \text{ Преобразуем ле-}$$

$$\text{вую часть: } \frac{2 \cos 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \cos 2\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}, \text{ ч.т.д.}$$

556. 1) $\sin 35^\circ + \sin 25^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 5^\circ = \cos 5^\circ$, ч.т.д.

2) Аналогично 1).

Проверь себя!

1. Указание: аналогично задаче 546, воспользуйтесь формулой

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

2. 4) Указание: $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4}$.

3. 1) Указание: $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha$.

2) Указание: воспользуйтесь формулой разности синусов в числителе.

4. 1) Указание: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta) = -\cos \alpha \sin \beta$.

2) Указание: воспользуйтесь формулами приведения.

3) Указание: воспользуйтесь формулой косинуса суммы.

$$557. \left(\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}\right) \cdot \frac{1 - \cos 4\alpha}{\cos(\pi - \beta + \alpha)} = \frac{\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{1 - \cos 4\alpha}{\cos(\pi - (\beta - \alpha))} =$$

$$= \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{2 \sin^2 2\alpha}{-\cos(\beta - \alpha)} = -\frac{8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = -8 \sin \alpha \cos \alpha = -4 \sin 2\alpha.$$

558. 1) Аналогично 2).

$$2) \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) - \sqrt{3} \sin(2,5\pi - 2\alpha)}{\cos(4,5\pi - 2\alpha) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)} = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)} =$$

$$= \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) - \sqrt{3} \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)} = \frac{2\left(\cos \frac{\pi}{6} \cos 2\alpha + \sin \frac{\pi}{6} \sin 2\alpha\right) - \sqrt{3} \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + 2\left(\cos \frac{\pi}{6} \cos 2\alpha - \sin \frac{\pi}{6} \sin 2\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{3} \cos 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{3}}, \text{ ч.т.д.}$$

559. 1) Указание: $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ и $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. В числителе и в знаменателе вынесите за скобки общий множитель.

2) Указание: $\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$ и $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$. В числителе и в знаменателе вынесите за скобки общий множитель.

560. Указание: $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$, кроме того $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0$.

561. Вычислить значение выражения $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Решение: из условия $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4}$, откуда $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{8}$.

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} (\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) =$$

$$= \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} (1 + \sin \alpha \cos \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(1 + \frac{3}{8} \right) = \frac{11}{6}.$$

562. Указание: $\frac{4 \sin 2\alpha + 5 \cos 2\alpha}{2 \sin 2\alpha - 3 \cos 2\alpha} = \frac{8 \sin \alpha \cos \alpha + 5 \cos^2 \alpha - 5 \sin^2 \alpha}{4 \sin \alpha \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha} =$

$$= \frac{\sin^2 \alpha (8 \operatorname{ctg} \alpha + 5 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 5)}{\sin^2 \alpha (4 \operatorname{ctg} \alpha - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 3)}.$$

563. 1) $\sin^2(\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$. Решение: преоб-

разуем правую часть: $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta) =$

$$= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) =$$

$$= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta =$$

$$= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) + \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \alpha) + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin 2\beta =$$

$$\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin 2\beta. \text{ Преобразуем левую часть:}$$

$$\sin^2(\alpha + \beta) = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 =$$

$$= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \sin \beta =$$

$$= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin 2\beta, \text{ ч.т.д.}$$

2) Указание: в левой части $\sin \alpha + \sin 5\alpha = 2 \sin 3\alpha \cos 2\alpha$.

564. Указание: в числителе части $\sin \alpha + \sin 5\alpha = 2 \sin 3\alpha \cos 2\alpha$, а в знаменателе $\cos \alpha + \cos 5\alpha = 2 \cos 3\alpha \cos 2\alpha$.

565. Указание: $\frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha}}{1 + 3 \operatorname{tg}^3 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + 3 \operatorname{tg}^3 \alpha} = \frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + 3 \operatorname{tg}^3 \alpha}$.

566. Указание: $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + \cos 2\alpha \right)$, т.к. справедлива

$$\text{формула } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

$$567. 1) \text{ Указание: } \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = \\ = ((\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha).$$

$$2) \sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha = \frac{1}{32} (\cos^2 4\alpha + 14 \cos 4\alpha + 17). \text{ Решение:}$$

$$\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha = (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)^2 - 2 \cos^4 \alpha \sin^4 \alpha =$$

$$= ((\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha)^2 - \frac{\sin^4 2\alpha}{8} = \left(1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\sin^4 2\alpha}{8} =$$

$$= 1 - \sin^2 2\alpha + \frac{\sin^4 2\alpha}{8}, \text{ но } \sin^2 2\alpha = \frac{1 - \cos 4\alpha}{2}, \text{ поэтому}$$

$$\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha = 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1 - \cos 4\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{32} (\cos^2 4\alpha + 14 \cos 4\alpha + 17),$$

что и требовалось доказать.

Глава VI

Тригонометрические уравнения

§33. Уравнение $\cos x = a$

Основные понятия:

Аркосинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in [0; \pi]$, косинус которого равен a .

Справедлива формула: $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ для любого $a \in [-1; 1]$.

Корни уравнения $\cos x = a$ находятся по формуле $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

568. 1) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, т.к. $\cos \frac{\pi}{2} = 0$; 2) $\arccos 1 = 0$;

3) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; 4) $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$;

5) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$;

6) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

569. 1) $2 \arccos 0 + 3 \arccos 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 3 \cdot 0 = \pi$;

2) $3 \arccos(-1) - 2 \arccos 0 = 3\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$;

3) $12 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = 12 \cdot \frac{\pi}{6} - 3 \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = 0$;

4) $4 \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 6 \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4 \cdot \frac{3\pi}{4} - 6 \cdot \frac{2\pi}{3} = 3\pi - 4\pi = -\pi$.

570. 1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\arccos \frac{1}{2}$. Решение: $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Т.к.

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}, \text{ то } \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} < \arccos \frac{1}{2}.$$

$$2) \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) \text{ и } \arccos(-1). \text{ Решение: } \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) < \pi, \arccos(-1) = \pi.$$

$$\text{Т.е. } \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) < \arccos(-1).$$

$$3) \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ и } \arccos\left(-\frac{1}{2}\right). \text{ Решение: } \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4},$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}. \text{ Т.е. } \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > \arccos\left(-\frac{1}{2}\right).$$

$$571. 1) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Решение: по формуле } x = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k,$$

$$k \in \mathbf{Z}. \text{ Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$2) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Решение: } x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi k = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,$$

$$k \in \mathbf{Z}. \text{ Ответ: } x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$3) \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Решение: } x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi k = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$572. 1) \cos x = \frac{3}{4}. \text{ Решение: } x = \pm \arccos\left(\frac{3}{4}\right) + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \arccos\left(\frac{3}{4}\right) + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$2) \cos x = -0,3. \text{ Решение: т.к. } -0,3 \in [-1; 1], \text{ то } x = \pm(\pi - \arccos 0,3) + 2\pi k,$$

$$k \in \mathbf{Z}. \text{ Ответ: } x = \pm(\pi - \arccos 0,3) + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

3) Аналогично 2).

$$573. 1) \cos 4x = 1. \text{ Решение: } 4x = \pm \arccos 1 + 2\pi k = 2\pi k; x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$2) \cos 2x = -1. \text{ Решение: } 2x = \pm \arccos(-1) + 2\pi k = \pm \pi + 2\pi k; x = \pm \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

3) $\sqrt{2} \cos \frac{x}{4} = -1$. Решение: преобразуем уравнение: $\cos \frac{x}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда

$\frac{x}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, откуда $x = \pm 3\pi + 8\pi k$. Ответ: $x = \pm 3\pi + 8\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$

4) Аналогично 3).

5) Аналогично 6).

6) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Решение: $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, откуда $2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$,

$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

574. 1) Указание: $\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x = \cos(x+3x) = \cos 4x$.

2) Указание: $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = \cos(2x-x) = \cos x$.

575. 1), 2) Указание: да, т.к. $\sqrt{6} - 3, \sqrt{7} - 2 \in [-1; 1]$.

3), 4) Указание: нет, т.к. $2 - \sqrt{10}, 1 - \sqrt{5} < -1$.

5) $\operatorname{tg}\left(3 \arccos \frac{1}{2}\right)$. Решение: $3 \arccos \frac{1}{2}$, а $\operatorname{tg} \pi$ определен, т.к. $\cos \pi \neq 0$.

Ответ: выражение имеет смысл.

576. 1) Указание: $\cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 4x$, т.е. $\cos 4x = 1$, см. задачу 573.

2) $4 \cos^2 x = 3$. Решение: $\cos^2 x = \frac{3}{4}$,

откуда $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решая первое уравнение, находим

$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, решая второе, находим

$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi l$, $k \in \mathbf{Z}$. Эти две серии

ответов можно объединить в одну

(рис. 73). Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

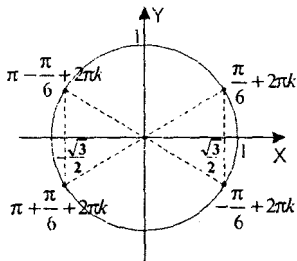


Рис. 73

3) Указание: $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$, откуда $\cos 2x = \frac{1}{2}$, аналогично задаче 573

4) Указание: $2\sqrt{2} \cos^2 x = \sqrt{2}(1 + \cos 2x)$, откуда $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, аналогично задаче 573.

5), 6), 8) Аналогично 7).

7) $(1 + 2 \cos x)(1 - 3 \cos x) = 0$. Решение: данное уравнение равносильно со-

вокупности уравнений $\begin{cases} 1 + 2 \cos x = 0 \\ 1 - 3 \cos x = 0 \end{cases}$. Из первого уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$,

$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из второго $\cos x = \frac{1}{3}$, $x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

577. Аналогично задаче 578.

578. Решение: $4x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. При $k = 0$

корни $x = \pm \frac{\pi}{16}$ удовлетворяют условию. При $k \geq 1$ наименьший корень

равен $-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{16}$ — уже не удовлетворяет условию. Следовательно в

этом случае решений нет. Аналогично в случае $k \leq -1$. Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{16}$.

579. 1) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$. Решение: $2x - 3 = \cos \frac{\pi}{3} = 0,5$, откуда $x = 1,75$.

Ответ: $x = 1,75$.

2) $\arccos \frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Решение: $x+1 = 3 \cos \frac{2\pi}{3} = 3 \cdot (-0,5) = -1,5$, откуда

$x = -2,5$. Ответ: $x = -2,5$.

580. Доказать, что при всех значениях a , таких, что $-1 \leq a \leq 1$, выполняется равенство $\cos(\arccos a) = a$.

Решение: пусть $\cos(\arccos a) = x$. Тогда $\arccos a = \arccos x$. Обозначим $\arccos a = b$, тогда $a = \cos b$ и $x = \cos b$. Т.е. $a = x$, ч.т.д.

1) $\cos(\arccos 0,2)$. Решение: т.к. $-1 \leq 0,2 \leq 1$, то по доказанной формуле $\cos(\arccos 0,2) = 0,2$. Ответ: $\cos(\arccos 0,2) = 0,2$.

2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$. Решение: т.к. $-1 \leq -\frac{2}{3} \leq 1$, то $\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = -\frac{2}{3}$.

3) Указание: по формуле приведения $\cos\left(\pi + \arccos \frac{3}{4}\right) = -\cos\left(\arccos \frac{3}{4}\right)$, аналогично 1).

4) Указание: по формуле приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{1}{3}\right) = \cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$, аналогично 1).

5) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$. Решение: по определению $\arccos\frac{4}{5} \in [0; \pi]$, поэтому

$\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right) > 0$. Тогда по основному тригонометрическому тождеству

$$\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}. \text{ Ответ: } \frac{3}{5}.$$

6) Указание: аналогично 5), $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)}}{\cos\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)}$.

581. Решение: пусть $\arccos(\cos \alpha) = x$. Тогда, по определению, $\cos \alpha = \cos x$.

Обозначим $\cos \alpha = a$. Т.к. $0 \leq \alpha, x \leq \pi$, то это равносильно тому, что $\alpha = \arccos a$ и $x = \arccos a$, т.е. $x = \alpha$, ч.т.д.

1) $5 \arccos\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)$. Решение: т.к. $0 \leq \frac{\pi}{10} \leq \pi$, то по доказанной формуле

$$5 \arccos\left(\cos\frac{\pi}{10}\right) = 5 \cdot \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2}. \text{ Ответ: } \frac{\pi}{2}.$$

2) Аналогично 1).

3) Указание: $\cos\frac{8\pi}{7} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\frac{\pi}{7}$, аналогично 4).

4) $\arccos(\cos 4)$. Решение: $4 > \pi$, поэтому сразу воспользоваться формулой не удастся. Но $\cos 4 = \cos(\pi + (4 - \pi)) = -\cos(4 - \pi)$, а $0 \leq 4 - \pi \leq \pi$. Т.е. $\arccos(\cos 4) = \arccos(-\cos(4 - \pi)) = \pi - \arccos(\cos(4 - \pi)) = \pi - (4 - \pi) = 2\pi - 4$.

Ответ: $2\pi - 4$.

582. 1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. Решение: по формуле синуса суммы

$$\sin\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) +$$

$$+ \cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right) \sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} \cdot \sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

Но $\arccos a \in [0; \pi]$, значит $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\frac{1}{3}\right)} =$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ аналогично } \sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{3}. \text{ Тогда}$$

$$\sin\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 1. \text{ Ответ: } 1.$$

2) Указание: воспользуйтесь формулой косинуса разности, аналогично 1).

- 583.** Упростить выражение $\cos(2 \arccos a)$, если $-1 \leq a \leq 1$. Решение: воспользуемся формулой косинуса двойного угла, тогда $\cos(2 \arccos a) =$
- $$= 2 \cos^2(\arccos a) - 1 = 2a^2 - 1, \text{ т.к. справедлива формула из задачи 581.}$$

Ответ: $2a^2 - 1$.

- 584.** Доказать, что если $-1 \leq a \leq 1$, то $2 \arccos \sqrt{\frac{1+a}{2}} = \arccos a$. Решение: возьмем косинус от обеих частей равенства, если получится тождество, то и исходное равенство было верным, т.к. $\arccos a \in [0; \pi]$.

$$\cos\left(2 \arccos \sqrt{\frac{1+a}{2}}\right) = 2 \left(\sqrt{\frac{1+a}{2}}\right)^2 - 1 = a \text{ (воспользовались результатом задачи 583), и } \cos(\arccos a) = a \text{ (воспользовались результатом задачи}$$

580). Т.е. $\cos\left(2 \arccos \sqrt{\frac{1+a}{2}}\right) = \cos(\arccos a)$ и $2 \arccos \sqrt{\frac{1+a}{2}} = \arccos a$, ч.т.д.

- 585.** Указание: 1) $\arccos 0,35 \approx 1,21$; 2) $\arccos(-0,27) \approx 1,84$.

§34. Уравнение $\sin x = a$

Основные понятия:

Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

Справедлива формула: $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ для любого $a \in [-1; 1]$.

Корни уравнения $\sin x = a$ находятся по формуле $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$.

586. 1) $\arcsin 0$. Решение: т.к. $\sin 0 = 0$, то $\arcsin 0 = 0$.

2) $\arcsin 1$. Решение: т.к. $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ и $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

3) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$. Решение: т.к. $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

4) $\arcsin \frac{1}{2}$. Решение: т.к. $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$, т.к. $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$, т.к. $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

587. 1) $\arcsin 1 - \arcsin(-1) = \arcsin 1 + \arcsin 1 = 2 \arcsin 1 = \pi$;

2) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$;

3) $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$;

4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$.

588. 1) Указание: первое число положительно, а второе отрицательно.

2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arcsin(-1)$. Решение: сравним числа $\arcsin \frac{3}{4} = x$ и

$\arcsin 1 = y$. Тогда по определению $\sin x = \frac{3}{4}$, а $\sin y = 1$. Откуда следует,

что $x < y$. Значит $\arcsin \frac{3}{4} < \arcsin 1$, $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) > \arcsin(-1)$.

589. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Решение: по формуле $x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, т.е. $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$. Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение: по формуле $x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, т.е. $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$. Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Решение: по формуле $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$, т.е. $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k$. Ответ: $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

590. 1) $\sin x = \frac{2}{7}$. Решение: т.к. $\frac{2}{7} \in [-1; 1]$, то уравнение имеет решения

$x = (-1)^k \arcsin \frac{2}{7} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = (-1)^k \arcsin \frac{2}{7} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

2) $\sin x = -\frac{1}{4}$. Решение: $x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Решение: $x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

591. 1) $\sin 3x = 1$. Решение: по формуле $3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$, откуда получа-

ем ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

2) $\sin 2x = -1$. Решение: по формуле $2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$, откуда полу-

чаем ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3) $\sqrt{2} \sin \frac{x}{3} = -1$. Решение: $\sin \frac{x}{3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{x}{3} = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$, отку-

да получаем ответ: $x = (-1)^{k+1} \frac{3\pi}{4} + 3\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

4) $2 \sin \frac{x}{2} = \sqrt{3}$. Решение: $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{x}{2} = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$, откуда

получаем ответ: $x = (-1)^k \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

5) $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$. Решение: $x + \frac{3\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbf{Z}$, откуда $x = -\frac{3\pi}{4} + \pi k,$

$k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = -\frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

6) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Решение: $2x + \frac{\pi}{2} = \pi k, k \in \mathbf{Z}$, откуда $2x = -\frac{\pi}{2} + \pi k;$

$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

592. 1) Указание: преобразуйте уравнение к виду:

$\sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x = 0$, по формуле синуса разности получим $\sin(4x - 2x) = 0$, т.е. $\sin 2x = 0$. Аналогично задаче 591.

2) Указание: преобразуйте уравнение к виду: $\sin(3x - 2x) = 0$, см. 1).

593. 1) $\arcsin(\sqrt{5} - 2)$. Решение: т.к. $|\sqrt{5} - 2| \leq 1$, то ответ: да, имеет.

2) $\arcsin(\sqrt{5} - 3)$. Решение: т.к. $|\sqrt{5} - 3| \leq 1$, то ответ: да, имеет.

3) $\arcsin(3 - \sqrt{17})$. Решение: т.к. $3 - \sqrt{17} < -1$, то ответ: нет, не имеет.

4) $\arcsin(2 - \sqrt{10})$. Решение: т.к. $2 - \sqrt{10} < -1$, то ответ: нет, не имеет.

5) $\operatorname{tg}\left(6 \arcsin \frac{1}{2}\right)$. Решение: $6 \arcsin \frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{\pi}{6} = \pi$, т.к. $\cos \pi \neq 0$, то

$\operatorname{tg}\left(6 \arcsin \frac{1}{2}\right)$ существует. Ответ: да.

6) $\operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Решение: $2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, т.к. $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, то

$\operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ не существует. Ответ: нет.

594. 1) $1 - 4 \sin x \cos x = 0$. Решение: $2 \sin 2x = 1$; $\sin 2x = \frac{1}{2}$. Откуда

$$2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}. \quad \text{Ответ: } x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

2) $\sqrt{3} - 4 \sin x \cos x = 0$. Решение: $2 \sin 2x = \sqrt{3}$; $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Откуда

$$2x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k; \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}. \quad \text{Ответ: } x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

3) $1 + 6 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} = 0$. Решение: по формуле синуса двойного угла

$$2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} = \sin \frac{x}{2}, \quad \text{поэтому уравнение равносильно } 3 \sin \frac{x}{2} = -1. \quad \text{Откуда}$$

$$\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{x}{2} = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k \quad \text{т.е. } x = (-1)^{k+1} 2 \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x = (-1)^{k+1} 2 \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$

595. 1) $1 + \cos 5x \sin 4x = \cos 4x \sin 5x$. Решение: преобразуем уравнение:

$$1 = \cos 4x \sin 5x - \cos 5x \sin 4x, \quad 1 = \sin(5x - 4x), \quad \sin x = 1. \quad \text{Откуда}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \quad \text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

2) Указание: аналогично 1), $\cos x \sin 2x + \sin x \cos 2x = \sin 3x$.

596. 1) $(4 \sin x - 3)(2 \sin x + 1) = 0$. Данное уравнение равносильно совокупно-

сти уравнений $\begin{cases} 4 \sin x - 3 = 0 \\ 2 \sin x + 1 = 0 \end{cases}$, откуда $\sin x = \frac{3}{4}$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$. Решая

первое уравнение, находим $x = (-1)^k \arcsin \frac{3}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$; из второго

уравнения $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^k \arcsin \frac{3}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$; $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

597. Найти все корни уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

Решение: по формуле корней находим $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}$. При $n \leq -1$ будут получаться отрицательные корни, при $n = 0, 1, 2, 3$ получим

корни $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}$ и $\frac{17\pi}{12}$ соответственно, которые удовлетворяют усло-

вию. При $n \geq 4$ корни будут больше 2π . Ответ: $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$.

598. Указание: аналогично задаче 597. Неравенство равносильно условию $0 < x - 4\pi < \pi$, т.е. $4\pi < x < 5\pi$.

599. Доказать, что $\sin(\arcsin a) = a$ при $-1 \leq a \leq 1$.

Решение: пусть $\sin(\arcsin a) = x$. Тогда, $\arcsin a = \arcsin x$. Обозначим $\arcsin a = \alpha$, тогда $a = \sin \alpha$ и $x = \sin \alpha$. Т.е. $a = x$, ч.т.д.

$$1) \sin\left(\arcsin \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7}; \quad 2) \sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\right) = -\frac{1}{5};$$

$$3) \sin\left(\pi + \arcsin \frac{3}{4}\right) = -\sin\left(\arcsin \frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4};$$

$$4) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{3}\right) = -\sin\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3};$$

5) $\cos\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)$. Решение: т.к. $\arcsin \frac{4}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\cos\left(\arcsin \frac{4}{5}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}. \text{ Ответ: } \frac{3}{5}.$$

6) Указание: $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{\sin\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}\right)}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}\right)}}$, см. 5).

600. Указание: аналогично задаче 581.

1) $7 \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{7}\right) = 7 \cdot \frac{\pi}{7} = \pi$; 2) $4 \arcsin\left(\sin \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$;

3) Указание: по формулам приведения $\sin \frac{6\pi}{7} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{\pi}{7}$.

4) $\arcsin(\sin 5)$. Решение: т.к. $5 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то необходимо воспользоваться формулами приведения. $5 - 2\pi \approx -1,3 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому $\arcsin(\sin 5) = \arcsin(\sin(5 - 2\pi)) = 5 - 2\pi$. Ответ: $5 - 2\pi$.

601. 1) $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$;

2) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$;

3) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

4) $\cos\left(\arcsin \frac{1}{4}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{1}{4}\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

602. 1) Т.к. $\arccos \in [0; \pi]$, где синус принимает положительные значения:

$$\sin\left(\arccos \frac{2}{3}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos \frac{2}{3}\right)} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3};$$

$$2) \sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\arccos \frac{1}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

603. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. Решение: по формуле синуса суммы:

$$\begin{aligned} \sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) &= \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \\ &+ \cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + \cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right). \end{aligned}$$

Воспользуемся результатами задач 601 и 602, получим:

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{9} + \sqrt{1-\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{1-\frac{8}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}. \text{ Ответ: } \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

2). Указание: воспользуйтесь формулой косинуса суммы, аналогично 1).

604. 1) $\arcsin\left(\frac{x}{2}-3\right) = \frac{\pi}{6}$. Решение: область определения уравнения

$$-1 \leq \frac{x}{2}-3 \leq 1, \text{ т.е. } 4 \leq x \leq 8. \text{ Тогда по определению } \frac{x}{2}-3 = \sin\frac{\pi}{6},$$

$$\frac{x}{2}-3 = \frac{1}{2}, \text{ откуда } x = 7 - \text{удовлетворяет области определения.}$$

Ответ: $x = 7$.

2) Аналогично 1).

605. Доказать, что если $0 \leq a \leq 1$, то $2\arcsin a = \arccos(1-2a^2)$.

Решение: т.к. $0 \leq a \leq 1$, то $-1 \leq 1-2a^2 \leq 1$, значит арккосинус определен.

Кроме того, раз $0 \leq a \leq 1$, то $\arcsin a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, значит $2\arcsin a \in [0; \pi]$ –

совпадает с областью значений арккосинуса. Формула справедлива равносильно тому, что $\cos(2\arcsin a) = \cos(\arccos(1-2a^2))$. Преобразуем левую часть:

$$\cos(2\arcsin a) = 1 - 2\cos^2(\arcsin a) = 1 - 2a^2, \text{ согласно результату задачи}$$

580 правая часть также равна $1 - 2a^2$. Т.е. $\cos(2\arcsin a) = \cos(\arccos(1-2a^2))$,

а значит и $2\arcsin a = \arccos(1-2a^2)$, ч.т.д.

606. Указание: 1) $\arcsin 0,65 \approx 0,708$; 2) $\arcsin(-0,31) \approx -0,315$.

§35. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ **Основные понятия:**

Арктангенсом числа $a \in \mathbf{R}$ называется такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a .

Справедлива формула $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$ для любого $a \in [-1; 1]$.

Корни уравнения $\operatorname{tg} x = a$ находятся по формуле $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

607. 1) $\operatorname{arctg} 0$. Решение: т.к. $\operatorname{tg} 0 = 0$ и $0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

$$2) \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4};$$

$$3) \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6};$$

$$4) \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

608. 1) $6\operatorname{arctg}\sqrt{3} - 4\operatorname{arcsin}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 6 \cdot \frac{\pi}{3} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 3\pi$;

$$2) 2\operatorname{arctg} 1 + 3\operatorname{arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$
;

$$3) 5\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) - 3\operatorname{arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) - 3 \cdot \frac{3\pi}{4} = -\frac{5\pi}{3} - \frac{9\pi}{4} = -\frac{47}{12}\pi.$$

609. 1) $\operatorname{arctg}(-1)$ и $\operatorname{arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Решение: $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$;

$$\operatorname{arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}. \text{ Т.к. } -\frac{\pi}{4} > -\frac{\pi}{3}, \text{ то } \operatorname{arctg}(-1) > \operatorname{arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ и $\operatorname{arccos}\frac{1}{2}$. Решение: $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; $\operatorname{arccos}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, следовательно $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \operatorname{arccos}\frac{1}{2}$.

3) $\operatorname{arctg}(-3)$ и $\operatorname{arctg} 2$. Решение: $\operatorname{arctg}(-3) = -\operatorname{arctg} 3$, но $\operatorname{arctg} 3 > 0$, значит $\operatorname{arctg}(-3) < 0$. А $\operatorname{arctg} 2 > 0$, следовательно $\operatorname{arctg}(-3) < \operatorname{arctg} 2$.

4) $\operatorname{arctg}(-5)$ и $\operatorname{arctg} 0$. Решение: $\operatorname{arctg}(-5) < 0$, а $\operatorname{arctg} 0 = 0$, следовательно $\operatorname{arctg}(-5) < \operatorname{arctg} 0$.

610. 1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Решение: $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

2) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Решение: $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Решение: $x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi k$, но $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$,

откуда $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

4) $\operatorname{tg} x = -1$. Решение: $x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k = -\operatorname{arctg} 1 + \pi k = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

5) $\operatorname{tg} x = 4$. Решение: $x = \operatorname{arctg} 4 + \pi k, k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \operatorname{arctg} 4 + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

6) $\operatorname{tg} x = -5$. Решение: $x = \operatorname{arctg}(-5) + \pi k$, откуда $x = -\operatorname{arctg} 5 + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = -\operatorname{arctg} 5 + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

611. 1) $\operatorname{tg} 3x = 0$. Решение: $3x = \operatorname{arctg} 0 + \pi k = \pi k; x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

2) $1 + \operatorname{tg} \frac{x}{3} = 0$. Решение: $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = -1; \frac{x}{3} = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, откуда

$x = -\frac{3\pi}{4} + 3\pi k, k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = -\frac{3\pi}{4} + 3\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

3) $\sqrt{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{6} = 0$. Решение: $\operatorname{tg} \frac{x}{6} = -\sqrt{3}; \frac{x}{6} = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k; x = -6\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k;$

$x = -6 \cdot \frac{\pi}{3} + 6\pi k = \pi(6k - 2), k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pi(6k - 2), k \in \mathbf{Z}$.

612. 1) $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$. Решение: данное уравнение равносильно сово-

купности $\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \end{cases}$. Из первого уравнения $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$. Из второ-

го уравнения $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

2) $(\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$. Решение: данное уравнение равносильно со-

вокупности $\begin{cases} \sqrt{3}\operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \end{cases}$. Из первого уравнения $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из

второго $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $(\operatorname{tg} x - 2)(2\cos x - 1) = 0$. Решение: данное уравнение равносильно сово-

купности $\begin{cases} \operatorname{tg} x = 2 \\ \cos x = 1/2 \end{cases}$. Из первого уравнения $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, из второго

уравнения $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Ответ: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) $(\operatorname{tg} x - 4,5)(1 + 2\sin x) = 0$. Решение: данное уравнение равносильно со-

вокупности $\begin{cases} \operatorname{tg} x = 4,5 \\ \sin x = -1/2 \end{cases}$. Из первого уравнения $x = \operatorname{arctg} 4,5 + \pi k$, из вто-

рого $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$. Ответ: $x = \operatorname{arctg} 4,5 + \pi k$, $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

5), 6) Аналогично 1). См также задачу 611.

613. Найти наименьший положительный и наибольший отрицательный ко-

рень уравнения $3\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$. Решение: преобразуем уравнение

$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. При $k = 0$ получаем наименьший

положительный корень $\frac{\pi}{6}$, при $k = -1$ получаем наибольший отрица-

тельный корень, равный $-\frac{5\pi}{6}$. Ответ: $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$.

614. 1) $\operatorname{arctg}(5x - 1) = \frac{\pi}{4}$. Решение: по определению арктангенса

$5x - 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$, $5x - 1 = 1$, откуда $x = \frac{2}{5}$. Ответ: $x = \frac{2}{5}$.

2) Аналогично 1).

615. Указание: воспользуйтесь определением арктангенса, аналогично зада-
чам 580, 599.

$$1) \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2,1) = 2,1; \quad 2) \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-0,3)) = -0,3;$$

$$3) \operatorname{tg}(\pi - \operatorname{arctg} 7) = \frac{\sin(\pi - \operatorname{arctg} 7)}{\cos(\pi - \operatorname{arctg} 7)} = \frac{\sin(\operatorname{arctg} 7)}{-\cos(\operatorname{arctg} 7)} = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 7) = -7.$$

$$4) \text{Указание: } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 6\right) = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 6).$$

616. Указание: воспользуйтесь определением арктангенса, аналогично задачам 581, 600.

$$1) 3 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}\right) = 3 \cdot \frac{\pi}{7} = \frac{3\pi}{7}; \quad 2) 4 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0,5) = 4 \cdot 0,5 = 2;$$

$$3) \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\pi}{8};$$

$$4) \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 13) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(13 - 4\pi)) = 13 - 4\pi, \text{ т.к. } 13 - 4\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

617. 1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}\right)$. Решение: $\operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, т.е. $\operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

$$2) \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4};$$

$$3) \operatorname{arctg}\left(2 \sin \frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{arctg}\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$4) \operatorname{arctg}\left(2 \sin \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{arctg}\left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

618. Доказать, что при любом действительном значении a справедливо ра-

венство $\cos(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. Решение: поскольку $\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$\cos(\operatorname{arctg} a) > 0$. Из тождества $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ имеем $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$.

Применим это тождество (с учетом знака), получим

$$\cos(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} a)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}, \text{ ч.т.д.}$$

619. Указание: 1) $\operatorname{arctg} 9 \approx 1,46$; 2) $\operatorname{arctg}(-7,8) \approx -1,44$.

§36. Решение тригонометрических уравнений

620. 1) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$. Решение: уравнение равносильно уравнению $\sin x = \pm \frac{1}{2}$.

Тогда имеются две серии корней $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ и $x = (-1)^k \frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Отметим эти корни на единичной окружности (см. рис. 73). Тогда нетрудно видеть, что эти две серии объединяются в одну.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: аналогично 1), две серии решений объединяются в одну –

$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ (см. рис. 74).

3) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Решение: данное уравнение – квадратное относительно $\sin x$. Тогда $\sin x = -1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Из первого уравнения $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, из

второго $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) Указание: данное уравнение – квадратное относительно, аналогично 3).

621. Указание: воспользуйтесь основным тригонометрическим тождеством и сведите уравнение к квадратному относительно 1), 2) $\sin x$, 3), 4) $\cos x$. См. также задачу 2 §36.

622. 1) Указание: данное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{2}$, аналогично 2).

2) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$. Решение: область определения уравнения $x \neq \frac{\pi k}{2}$. Тогда $\operatorname{tg} x \neq 0$, поэтому на него можно домножить обе части уравнения. Получим $\operatorname{tg}^2 x = 1$, откуда $\operatorname{tg} x = \pm 1$. Из первого уравнения $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; а

из второго $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3), 4) Указание: данное уравнение квадратное относительно $\operatorname{tg} x$, аналогично задаче 623 п. 1).

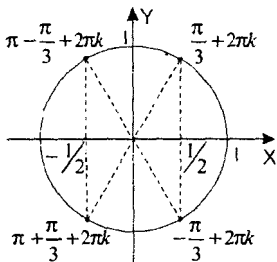


Рис. 74

623. 1) $1 + 7 \cos^2 x = 3 \sin 2x$. Решение: т.к. $\cos x = 0$, то $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 0$, т.е. уравнение не выполнено. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$

и воспользуемся тождествами $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ и $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. По-

лучим: $8 + \operatorname{tg}^2 x = 6 \operatorname{tg} x$. Это уравнение квадратное относительно $\operatorname{tg} x$, тогда $\operatorname{tg} x = 4$ или $\operatorname{tg} x = 2$. Из первого уравнения $x = \operatorname{arctg} 4 + \pi k$, а из второго $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \operatorname{arctg} 4 + \pi k$, $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: разделите обе части уравнения на $\sin^2 x \neq 0$ и воспользуйтесь тождествами $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ и $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Уравнение сведется к квадратному относительно $\operatorname{ctg} x$.

3) $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$. Решение: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, поэтому $2 \cos^2 x + \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$, $(\cos x + \sin x)(2 \cos x - \sin x) = 0$, откуда $\cos x = -\sin x$ или $2 \cos x = \sin x$. $\cos x = 0$ не является решением ни первого, ни второго уравнения, разделим на $\cos x \neq 0$ обе части каждого из уравнений. Получим $\operatorname{tg} x = -1$ или $\operatorname{tg} x = 2$. Откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ и

$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) Указание: аналогично 3), $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, таким образом $3 \cos^2 x - 2 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x = 0$, $(3 \cos x - \sin x)(\cos x + 2 \sin x) = 0$.

624. 1) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 0$. Решение: разделим обе части уравнения на

$\sqrt{3+1} = 2$, получим $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 0$, $\cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x = 0$. По

формуле косинуса суммы $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$, откуда $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi k$,

$x = \frac{2\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{2\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: преобразуйте уравнение $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Аналогично 1).

3) $\sin x = 2 \cos x$. Решение: $\cos x = 0$ не является решением данного урав-

нения, разделим на $\cos x \neq 0$ обе части уравнения. Получим $\operatorname{tg} x = 2$, откуда $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Замечание: можно было решать так же, как и 1), но получилось бы сложнее.

4) Аналогично 3).

625. Указание: аналогично задаче 624 п.1). См. также задачу 8 из §36. Сведите уравнение к виду:

$$1) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1;$$

$$4) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

626. 1) $\cos x = \cos 3x$. Решение: перенесем все слагаемые в правую часть и воспользуемся формулой разности косинусов, получим $-2 \sin 2x \sin x = 0$. Тогда $\sin 2x = 0$ или $\sin x = 0$. Откуда $2x = \pi k$ или $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Заметим, что первая серия корней содержится во второй.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

2) Аналогично 1).

3) Аналогично 4).

4) $\sin x + \cos 3x = 0$. Решение: $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, теперь по формуле суммы косинусов получаем: $2 \cos \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x + 3x\right) \cos \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x - 3x\right) = 0$,

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0. \text{ Тогда } \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0 \text{ или } \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0.$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0. \text{ Тогда } \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0 \text{ или } \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0.$$

Из первого уравнения $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, из второго $-2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$,

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}. \text{ Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi k, x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

627. 1) Указание: $\cos 3x - \cos 5x = -2 \sin(-x) \sin 4x = 2 \sin x \sin 4x$, поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $\sin 4x(2 \sin x - 1) = 0$. Аналогично задаче 596.

2) Указание: $\sin 7x - \sin x = 2 \sin 3x \cos 4x$, поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $\cos 4x(2 \sin 3x - 1) = 0$. Аналогично задаче 596.

3) Указание: $\cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x$, поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $2 \cos 2x (\cos x - 2) = 0$. Аналогично задаче 596.

4) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 4x$. Решение: $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$, поэтому $\cos 4x + \cos 2x = 0$, $2 \cos 3x \cos x = 0$, откуда $\cos 3x = 0$ или $\cos x = 0$. Из

первого уравнения $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$, из второго уравнения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$,

$k \in \mathbf{Z}$. Заметим, что вторая серия решений содержится в первой (а именно,

при $k = 3m + 1$ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(3m+1)}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi m$). Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

628. 1) $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) \left(2 \sin \frac{x}{12} + 1 \right) = 0$. Решение: область определения уравнения

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Данное уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0 \\ 2 \sin \frac{x}{12} + 1 = 0, \text{ откуда находим } x = \frac{\pi}{3} + \pi n \text{ или } \frac{x}{12} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \end{cases}$$

$n \in \mathbf{Z}$. Для второй серии решений получаем, что удовлетворяет области

уравнения. Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x = (-1)^{n+1} 2\pi + 12\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

3) Аналогично 4).

4) $\left(1 + \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right) (\operatorname{tg} x - 3) = 0$. Решение: область определения урав-

нения $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из равенства нулю первого сомножителя нахо-

дим $x + \frac{\pi}{4} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, т.е. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n$. При $n = 2k$

получаем $x = 2\pi k$, что удовлетворяет области определения, а при

$n = 2k + 1$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi(2k + 1)$ не удовлетворяет области определения. Из

равенства нулю второго сомножителя находим $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

629. 1) Указание: $\sin x = 0$ – решение. Если $\sin x \neq 0$, то разделите обе части

уравнения на $\sin^2 x$, получится $\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} x} = 1$. Аналогично задаче 610.

2) Указание: $\cos x = 0$ – решение. Если $\cos x \neq 0$, то разделите обе части уравнения на $\cos x$, получится $2 \sin x = 1$. Аналогично задаче 589.

3) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$. Решение: преобразуем левую часть уравнения: $\sin 4x + \sin^2 2x = 2 \sin 2x \cos 2x + \sin^2 2x = \sin 2x(2 \cos 2x + \sin 2x)$, таким образом $\sin 2x = 0$ или $2 \cos 2x + \sin 2x = 0$. Из первого уравнения $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Поделим второе уравнение на $\sin 2x \neq 0$, получим

$$\frac{2}{\operatorname{tg} 2x} = -1, \text{ откуда } x = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}$, $x = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) Указание: аналогично 3), $\sin 2x + \cos^2 x = \cos x(2 \sin x + \cos x)$.

630. 1) Указание: перенесите все в левую часть и преобразуйте уравнение:

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x - 1 - \frac{1}{3} \sin 4x &= 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - 1 - \frac{1}{3} \sin 4x = -\cos 2x - \frac{2}{3} \cos 2x \sin 2x = \\ &= -\cos 2x \left(1 + \frac{2}{3} \sin 2x \right) \end{aligned}$$

2) Указание: $2 \cos^2 2x - 1 = \cos 4x$. Аналогично задаче 624.

3) Указание: $2 \cos^2 2x + 3 \cos^2 x = 2 \cos^2 2x + 3 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Домножим на 2

и перенесем все в левую часть. Получим: $4 \cos^2 2x + 3 \cos 2x - 1 = 0$. Это уравнение квадратное относительно $\cos 2x$, см. задачу 1 §36.

4) Указание: $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$.

631. 1) $2 \sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$. Решение: $2 \sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2 =$

$$= 2(\sin x + \cos x)^2 - 3(\sin x + \cos x) = 0. \text{ Заменим } u = (\sin x + \cos x), \text{ тогда}$$

$$2u^2 - 3u = 0, \text{ откуда } u = 0 \text{ или } u = \frac{3}{2}. \text{ Но } \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right),$$

поэтому $\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$ или $\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{2\sqrt{2}} > 1$. Второе уравнение не

имеет решений, а из первого $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$. Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: аналогично 1), $\sin 2x + 3 = 2 + (\sin x + \cos x)^2$.

3) Указание: аналогично 1), $\sin 2x + 4 = 3 + (\sin x + \cos x)^2$.

4) Указание: $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x + 1) = 4 + (\sin x + \cos x)^2 + 5(\sin x + \cos x)$, аналогично 1).

632. 1) Указание: $1 - \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x - \cos \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}$, аналогично задаче 629.

2) Указание: $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$, см. задачу 631.

633. 1) $8 \sin x \cos x \cos 2x = 1$. Решение: преобразуем левую часть:

$8 \sin x \cos x \cos 2x = 4 \sin 2x \cos 2x = 2 \sin 4x$. Откуда $\sin 4x = \frac{1}{2}$, тогда

$4x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: $\sin^4 x = (1 - \cos^2 x)^2$, сделайте замену $u = \cos^2 x$.

634. 1) $2 \cos^2 2x + 3 \sin 4x + 4 \sin^2 2x = 0$. Решение: по формуле синуса двойного угла $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$. Подставим в уравнение и разложим на множители левую часть. Получим: $(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x + 2 \sin 2x) = 0$,

т.е. $\sin 2x = -\cos 2x$, $\sin 2x = -\frac{1}{2} \cos 2x$. Т.к. $\cos 2x = 0$ не является решением, разделим оба уравнения на $\cos 2x$. Получим $\operatorname{tg} 2x = -1$ или

$\operatorname{tg} 2x = -\frac{1}{2}$, откуда $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ или $2x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $x = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: $1 - \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = \sin^2 x + 3 \cos^2 x - \sin x \cos x$. Аналогично задаче 5 §36.

3) Указание: $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$, сделайте замену $u = \cos 2x$. Тогда

$\frac{1}{4} u^3 - u = 0$, откуда $u = 0$ или $u = \pm \frac{1}{2}$.

4) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1 + 4 \sin x$. Решение: $\cos^2 3x = 1 - \sin^2 3x$, подставим в уравнение, получим $\sin^2 2x - \cos^2 3x = 4 \sin x$. Преобразуем левую часть: $\sin^2 2x - \cos^2 3x = (\sin 2x - \sin 3x)(\sin 2x + \sin 3x) =$

$$= -2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} \cdot 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = - \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) \cdot \left(2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{5x}{2} \right) =$$

$= -\sin x \sin 5x$. Т.е. исходное уравнение равносильно $-\sin x \sin 5x = 4 \sin x$, $\sin x(4 + \sin 5x) = 0$, откуда $\sin x = 0$ (второй множитель всегда больше нуля); $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

635. 1) Указание: перенесите все в левую часть, тогда по формуле суммы косинусов получится $\cos(2x + x) = 0$.

2) Указание: перенесите все в левую часть, тогда по формуле разности синусов получится $\sin(2x - x) = 0$.

3), 4) Аналогично задаче 12 §36.

636. 1) $4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0$. Решение: $\cos x = 0$ не является решением, поэтому разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим:

$4 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x - 6 = 0$. Это уравнение квадратное относительно $\operatorname{tg} x$. Находим его корни: $\operatorname{tg} x = 2$ и $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$. Т.е. $x = \arctg 2 + \pi k$ или

$x = -\arctg \frac{3}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \arctg 2 + \pi k$, $x = -\arctg \frac{3}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

3), 4) Указание: аналогично 1), воспользуйтесь формулой $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

637. 1) $4 \sin 3x + \sin 5x - 2 \sin x \cos 2x = 0$. Решение: применим формулу преобразования произведения в сумму, получим:

$$4 \sin 3x + \sin 5x - 2 \sin x \cos 2x = 4 \sin 3x + \sin 5x - (\sin 3x - \sin x) =$$

$= 3 \sin 3x + \sin 5x + \sin x$. По формуле суммы синусов $\sin 5x + \sin x = 2 \sin 3x \cos 2x$, т.е. окончательно $\sin 3x(3 + 2 \cos 2x) = 0$. Откуда

$\sin 3x = 0$ или $\cos 2x = -\frac{3}{2} < -1$. Из первого уравнения $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$,

второе уравнение решений не имеет. Ответ: $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: преобразуйте левую часть уравнения:

$$6 \cos 2x \sin x + 7 \sin 2x = \sin x (6 \cos 2x + 14 \cos x) = \sin x (12 \cos^2 x + 14 \cos x - 6).$$

638. 1) Указание: $\sin^2 3x - \sin^2 x = (\sin 3x - \sin x)(\sin 3x + \sin x) =$
 $= 2 \sin x \cos 2x \cdot 2 \sin 2x \cos x = 2 \sin^2 2x \cos 2x$, т.е. уравнение равносильно
уравнению $\sin^2 2x = 2 \sin^2 2x \cos 2x$.

2) Указание: раскройте скобки и сделайте замену: $u = (\sin x + \cos x) =$
 $= \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, тогда $\cos x \sin x = \frac{(\cos x + \sin x)^2 - 1}{2} = \frac{u^2 - 1}{2}$.

639. 1) Указание: по формуле преобразования произведения в сумму:
 $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2} \sin 2x (\cos 2x - \cos 4x)$, т.е. $\frac{1}{2} \sin 2x (\cos 2x - \cos 4x) =$
 $= \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x$.

2) Указание: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$.

640. 1) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$. Решение: перегруппируем сла-
гаемые: $\cos^2 x - \cos^2 4x = \cos^2 3x - \cos^2 2x$. Получаем: $\cos^2 x - \cos^2 4x =$
 $= (\cos x - \cos 4x)(\cos x + \cos 4x) = 2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{5x}{2} \cdot 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{5x}{2} = \sin 3x \sin 5x$,
аналогично $\cos^2 3x - \cos^2 2x = -\sin x \sin 5x$. Т.е. $\sin 5x (\sin x + \sin 5x) = 0$,
 $2 \sin 5x \sin 3x \cos 2x = 0$, откуда находим три серии корней: $x = \frac{\pi k}{5}$,

$x = \frac{\pi k}{3}$ и $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{\pi k}{5}$, $x = \frac{\pi k}{3}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: по формуле суммы кубов и основному тригонометрическому
тождеству $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 2x$.

641. 1) Аналогично 2).

2) $\sin x + \frac{1}{\sin x} = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}$. Решение: область определения уравнения

$x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Домножим обе части на $\sin^2 x \neq 0$, получим
 $\sin^3 x + \sin x = \sin^4 x + 1$, $\sin^3 x + \sin x - \sin^4 x - 1 = 0$. Сделаем замену
 $u = \sin x$, тогда $u^3 + u - u^4 - 1 = 0$, $-(u-1)^2(u^2 + u + 1) = 0$, что равно-

сильно $u = 1$, т.е. $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

642. 1) $\sin x \sin 5x = 1$. Решение: т.к. $-1 \leq \sin x \leq 1$ и $-1 \leq \sin 5x \leq 1$ при любых значениях x , то равенство возможно, только если $\sin x = \sin 5x = 1$ или $\sin x = \sin 5x = -1$. Первое равенство выполняется, только если $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, а второе, если $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) Аналогично 1).

643. 1) $\sqrt{5 \cos x - \cos 2x} = -2 \sin x$. Решение: равенство возможно только если $\sin x \leq 0$, при таких x возведем уравнение в квадрат. Получим:

$$5 \cos x - \cos 2x = 4 \sin^2 x; \quad 5 \cos x - 2 \cos^2 x + 1 - 4(1 - \cos^2 x) = 0;$$

$$2 \cos^2 x + 5 \cos x - 3 = 0. \quad \text{Откуда } \cos x = \frac{1}{2} \text{ или } \cos x = -3 \text{ (что не возмож-}$$

но). Таким образом $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Но корни $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ не удовлетворяют условию $\sin x \leq 0$. Осталось проверить, что вторая серия корней удовлетворяет области определения уравнения:

$$5 \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) - \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + 4\pi k\right) = 5 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 3 > 0.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) Аналогично 1).

644. 1) Указание: рассмотрите отдельно случаи $\cos x \geq 0$ и $\cos x < 0$, аналогично задаче 643.

2) Указание: рассмотрите отдельно случаи $\operatorname{tg} x \geq 0$ и $\operatorname{tg} x < 0$, аналогично задаче 643.

645. 1) $\begin{cases} \cos(x+y) = 0 \\ \cos(x-y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x-y = 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k + 2\pi n \\ 2y = \frac{\pi}{2} + \pi k - 2\pi n \end{cases}$, откуда

$$\text{находим: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} + \pi n, \quad y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} - \pi n.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} - \pi n\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) Указание: возведите первое уравнение в квадрат и воспользуйтесь основным тригонометрическим тождеством.

646. Указание: это уравнение сводится к квадратному относительно $\cos x$. Аналогично задаче 647.

647. Найти, при каких значениях a , уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = a$ не имеет корней. Решение: преобразуем уравнение $(1-a)\sin^2 x - \sin x \cos x - (2+a)\cos^2 x = 0$. При $a = 1$ $\cos x = 0$ является решением, следовательно $a \neq 1$. Тогда $\cos x = 0$ не является решением, разделим на $\cos^2 x$. Получим: $(1-a)\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - (2+a) = 0$. Так как тангенс пробегает все вещественные числа, значит если это уравнение (как квадратное относительно тангенса) имеет корни, то и исходное уравнение имеет корни. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы $D < 0$, т.е.

$$1 + 4(1-a)(2+a) < 0, \quad 4a^2 + 4a - 9 > 0, \quad \text{откуда} \quad a > \frac{\sqrt{10}-1}{2} \quad \text{или} \\ a < \frac{-1-\sqrt{10}}{2}. \quad \text{Ответ: } a > \frac{\sqrt{10}-1}{2}, \quad a < \frac{-1-\sqrt{10}}{2}.$$

§37. Примеры решения простейших тригонометрических неравенств

Основные формулы ($-1 \leq \alpha \leq 1, k \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} \cos x \geq \alpha &\Leftrightarrow -\arccos \alpha + 2\pi k \leq x \leq \arccos \alpha + 2\pi k; \\ \cos x > \alpha &\Leftrightarrow -\arccos \alpha + 2\pi k < x < \arccos \alpha + 2\pi k; \\ \cos x \leq \alpha &\Leftrightarrow \arccos \alpha + 2\pi k \leq x \leq 2\pi - \arccos \alpha + 2\pi k; \\ \cos x < \alpha &\Leftrightarrow \arccos \alpha + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos \alpha + 2\pi k; \\ \sin x \geq \alpha &\Leftrightarrow \arcsin \alpha + 2\pi k \leq x \leq \pi - \arcsin \alpha + 2\pi k; \\ \sin x > \alpha &\Leftrightarrow \arcsin \alpha + 2\pi k < x < \pi - \arcsin \alpha + 2\pi k; \\ \sin x \leq \alpha &\Leftrightarrow -\pi - \arcsin \alpha + 2\pi k \leq x \leq \arcsin \alpha + 2\pi k; \\ \sin x < \alpha &\Leftrightarrow -\pi - \arcsin \alpha + 2\pi k < x < \arcsin \alpha + 2\pi k. \end{aligned}$$

648–650. Указание: воспользуйтесь основными формулами. См. задачу 652.

651. 1) $\sin x \geq -\sqrt{2}$. Решение: т.к. $\sin x \geq -1 > -\sqrt{2}$, то неравенство справедливо при всех x . Ответ: $x \in \mathbb{R}$.

2) Указание: $\sin x \leq 1$ при всех x .

3) Указание: т.к. $\sin x \geq -1$ при всех x , то $\sin x = -1$.

4) Указание: т.к. $\sin x \leq 1$ при всех x , то $\sin x = 1$.

652. 1) $\sqrt{2} \cos 2x \leq 1$. Решение: преобразуем неравенство к стандартному

виду $\cos 2x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда по формуле:

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi k \leq 2x \leq 2\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi k, \quad \frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq 2x \leq \frac{7\pi}{4} + 2\pi k,$$

$$k \in \mathbf{Z}. \text{ Ответ: } \frac{\pi}{8} + \pi k \leq x \leq \frac{7\pi}{8} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

2) Аналогично 1).

3) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение: по формуле:

$$-\pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k,$$

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \text{ откуда } -\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

4) Аналогично 3).

653. 1) $\cos\left(\frac{x}{3} + 2\right) \geq \frac{1}{2}$. Решение: по формуле $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq \frac{x}{3} + 2 \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Домножим это неравенство на 3, получим $-\pi + 6\pi k \leq x + 6 \leq \pi + 6\pi k$, откуда $-\pi - 6 + 6\pi k \leq x \leq \pi - 6 + 6\pi k$. Ответ: $-\pi - 6 + 6\pi k \leq x \leq \pi - 6 + 6\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

654. 1) $\sin^2 x + 2\sin x > 0$. Решение: разложим левую часть на множители: $\sin x(\sin x + 2) > 0$, но $\sin x \geq -1$, т.е. $\sin x + 2 > 0$. Поэтому необходимо и достаточно $\sin x > 0$, откуда $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\text{Ответ: } 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

2) $\cos^2 x - \cos x < 0$. Решение: разложим на множители, $\cos x(\cos x - 1) < 0$. Т.к. $\cos x \leq 1$, то $\cos x - 1 \leq 0$. Значит необходимо и достаточно, чтобы $\cos x > 0$ и $\cos x \neq 1$. Откуда $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad x \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Упражнения к главе VI

$$655. 1) 2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \frac{\pi}{3} + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3};$$

$$2) \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - 4 \arcsin 1 = \frac{\pi}{4} - 4 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{4};$$

$$3) \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3};$$

$$4) \arccos(-1) - \arcsin(-1) = \pi - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2};$$

$$5) 2 \operatorname{arctg} 1 + 3 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \left(-\frac{\pi}{6} \right) = 0;$$

$$6) 4 \operatorname{arctg}(-1) + 3 \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 4 \cdot \left(-\frac{\pi}{4} \right) + 3 \cdot \frac{\pi}{3} = 0.$$

$$656. 1) \cos(4-2x) = -\frac{1}{2}. \text{ Решение: } 4-2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \quad 2x = 4 \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,$$

отсюда $x = 2 \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$. Ответ: $x = 2 \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

$$2) \cos(6+3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Решение: } 6+3x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \quad 3x = -6 \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,$$

отсюда $x = -2 \pm \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k$. Ответ: $x = -2 \pm \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

$$3) \quad \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 1 = 0. \quad \text{Решение:} \quad \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \quad 2x = \pm \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \text{ отсюда } x = \pm \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x = -2 \pm \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

$$4) 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - 3x \right) - \sqrt{3} = 0. \text{ Решение: } \cos \left(\frac{\pi}{3} - 3x \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \frac{\pi}{3} - 3x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k;$$

$$3x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \text{ отсюда } x = \pm \frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

$$657. 1) 2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) + 1 = 0. \text{ Решение: } \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2}; \quad 3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k;$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \text{ отсюда } x = \frac{\pi}{12} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

2) $1 - \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$. Решение: $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$; $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$;
 $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\pi k = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) $3 + 4\sin(2x+1) = 0$. Решение: $\sin(2x+1) = -\frac{3}{4}$; $2x+1 = (-1)^{k+1} \cdot \arcsin\frac{3}{4} + \pi k$;
 $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2} \arcsin\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2} \arcsin\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4) $5\sin(2x-1) - 2 = 0$. Решение: $\sin(2x-1) = \frac{2}{5}$; $2x-1 = (-1)^k \arcsin\frac{2}{5} + \pi k$;
 $x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}$. Ответ: $x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

658. 1) Указание: преобразуйте уравнение: $(1 + \sqrt{2} \cos x)(1 - 2 \sin 2x) = 0$, откуда $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

2) Указание: преобразуйте уравнение: $(1 - \sqrt{2} \cos x)(1 + \sin 4x) = 0$, откуда $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin 4x = -1$.

659. Аналогично задаче 611.

660. 1), 2) Указание: уравнение является квадратным относительно $\sin x$. Аналогично задаче 1 §36.

3), 4) Указание: уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Аналогично задаче 1 §36.

661. Аналогично задачам 2 и 3 §36.

662. Аналогично задаче 4 §36.

663. 1) Указание: уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} 2x = \frac{3}{2}$.

2) Указание: уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} 3x = -\frac{5}{4}$.

664. 1) $5 \sin x + \cos x = 5$. Решение: разделим обе части уравнения на

$$\sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}, \text{ получим } \frac{5}{\sqrt{26}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{26}} \cos x = \frac{5}{\sqrt{26}}. \text{ Рассмотрим угол}$$

φ , такой, что $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{26}}$ и $\sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{26}}$ (такой угол существует). Тогда

$$\cos(x - \varphi) = \frac{5}{\sqrt{26}}, \text{ откуда } x = \pm \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} + \varphi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x = \pm \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} + \varphi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$, где $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{26}}, \sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{26}}$.

2) Аналогично 1).

665. 1) Указание: преобразуйте уравнение:

$$\sin 3x - \sin 5x = 2 \sin \frac{3x - 5x}{2} \cos \frac{3x + 5x}{2} = -2 \sin x \cos 4x.$$

2) Указание: преобразуйте уравнение: $\cos^2 3x - \cos 3x \cos 5x =$

$$= \cos 3x (\cos 3x - \cos 5x) = -2 \cos 3x \sin \frac{3x - 5x}{2} \sin \frac{3x + 5x}{2} = 2 \cos 3x \sin x \sin 4x.$$

3) Указание: преобразуйте уравнение аналогично 1) (по формуле разности косинусов).

4) Указание: преобразуйте уравнение аналогично 2) (по формуле разности синусов).

Проверь себя!

1. 1) $\arccos 1 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

2. 1) Указание: $\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x = \sin(3x - x) = \sin 2x$.

2), 3) Аналогично задачам 2 и 4 §36.

4) Аналогично задаче 665 п. 1).

5) Указание: $2 \sin x + \sin 2x = 2 \sin x(1 + \cos x)$.

666. 1) Указание: $\sin\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$, см. задачу 582.

2) Указание: $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

3) Указание: $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

667. Указание: 1), 3) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; 2) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$; 4) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

668. Аналогично задаче 664.

669. Указание: разделите обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, уравнение станет квадратным относительно $\operatorname{tg} x$.

670. 1) Указание: аналогично 2), перенесите все в левую часть и преобразуйте:

$$\begin{aligned} \text{те: } 1 + 2 \sin x - 2 \sin x \cos x - 2 \cos x &= (\cos x - \sin x)^2 - 2(\cos x - \sin x) = \\ &= 2 \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 2\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \left(\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

2) $1 + 3 \cos x = \sin 2x + 3 \sin x$. Решение: перенесем все в левую часть и преобразуем: $1 + 3 \cos x - \sin 2x - 3 \sin x = (\cos x - \sin x)^2 + 3(\cos x - \sin x) =$

$$= 2 \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 3\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \left(2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 3\sqrt{2} \right). \quad \text{Т.е.}$$

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \left(2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 3\sqrt{2} \right) = 0, \text{ откуда } \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} < -1 \text{ или}$$

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0. \text{ Из первого уравнения } x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}, \text{ а второе уравнение не имеет решений. Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

671. 1) $\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \cos 2x$. Решение:

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right), \text{ тогда по формуле суммы ко-$$

$$\text{синусов } \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} \cos x = \cos x. \text{ Таким образом}$$

$$\cos x = 1 + \cos 2x, \quad \cos x = 1 + 2 \cos^2 x - 1, \quad 2 \cos^2 x - \cos x = 0. \quad \text{Значит}$$

$$\cos x = 0 \text{ или } \cos x = \frac{1}{2}. \text{ Из первого уравнения } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}, \text{ а из}$$

$$\text{второго } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}. \text{ Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

2) Аналогично 1).

672. 1) Указание: $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) =$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x.$$

$$2) \text{ Указание: } \cos^3 x \sin x + \sin^3 x \cos x = \sin x \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

673. Указание: воспользуйтесь формулами половинного угла:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \text{ и } \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}.$$

674. 1) $\sin^2 x - \cos x \cos 3x = \frac{1}{4}$. Решение: преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \cos x \cos 3x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{1}{2} - \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x = \\ &= \frac{1}{2} - \cos 2x - \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1). \text{ Откуда } \cos^2 2x + \cos 2x - \frac{3}{4} = 0, \cos 2x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

или $\cos 2x = -\frac{3}{2} < -1$. Из первого уравнения $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, а второе уравнение не имеет решений. Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} 2) \text{ Указание: } \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \\ &= 2\sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x. \end{aligned}$$

3), 4) Указание: уравнение сводится к квадратному, воспользуйтесь формулами косинуса двойного угла, см. п.5).

5) $5\sin 2x + 4\cos^3 x - 8\cos x = 0$. Решение: преобразуем уравнение:

$$10\sin x \cos x + 4\cos^3 x - 8\cos x = 0, \quad 2\cos x(5\sin x + 2\cos^2 x - 4) = 0, \quad \text{т.е.}$$

$\cos x = 0$ или $5\sin x + 2\cos^2 x - 4 = 0$. Из первого уравнения получаем:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \text{ Преобразуем второе уравнение, получим:}$$

$$5\sin x + 2(1 - \sin^2 x) - 4 = 0, \quad -2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0, \text{ откуда } \sin x = \frac{1}{2} \text{ или}$$

$\sin x = 2 > 1$. Из первого уравнения $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, а второе

уравнение не имеет решений. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

675. 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2\sin \frac{x+3x}{2} \cos \frac{x-3x}{2} + \sin 2x = \sin 2x(2\cos x + 1)$.

2) Указание: $\cos x - \cos 3x = 2\sin 2x \sin x$, а $\cos 2x - \cos 4x = 2\sin 3x \sin x$. Если перенести все в правую часть и воспользоваться формулой разности синусов, получим: $4\sin x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} = 0$.

$$676. 1) \sin\left(\arcsin \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}; \quad 2) \sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = -\frac{1}{4};$$

$$3) \sin\left(\pi - \arcsin \frac{3}{4}\right) = \sin\left(\arcsin \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4};$$

$$4) \sin\left(\pi + \arcsin \frac{2}{3}\right) = -\sin\left(\arcsin \frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}.$$

$$677. 1) \operatorname{tg}\left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{5}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4};$$

$$2) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2\right) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) = 2.$$

$$678. 1) \frac{\sin 2x}{\sin x} = 0. \text{ Решение: О.О.У. } \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \text{ Тогда}$$

$\sin 2x = 0$, откуда $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. На рис. 76 видно, что уравнению удов-

летворяют корни $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$2) \frac{\sin 3x}{\sin x} = 0. \text{ Решение: О.О.У. } \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \text{ Тогда } \sin 3x = 0,$$

откуда $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$. Таким образом, уравнению удовлетворяют только

те корни, когда $k \neq 3n$, $n \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 3n$, $n \in \mathbf{Z}$.

$$3) \frac{\cos 2x}{\cos x} = 0. \text{ Решение: О.О.У. } \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \text{ Тогда}$$

$\cos 2x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$. Таким образом, вся серия корней

удовлетворяет О.О. Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$4) \frac{\cos 3x}{\cos x} = 0. \text{ Решение: О.О.У. } \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \text{ Тогда}$$

$\cos 3x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$, $k \in \mathbf{Z}$. Совмещая с О.О., получаем ответ:

$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$5) \frac{\sin x}{\sin 5x} = 0. \text{ Решение: О.О.У. } \sin 5x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi n}{5}, \quad n \in \mathbf{Z}. \text{ Тогда}$$

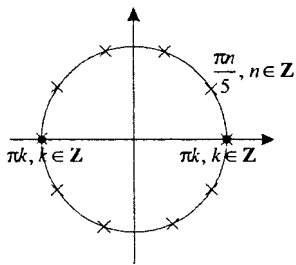


Рис. 75

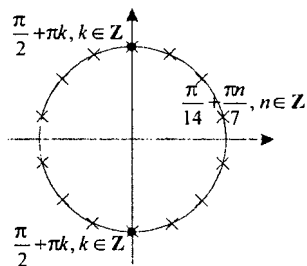


Рис. 76

$\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Но при $n = 5k$ видно, что эти корни не удовлетворяют области определения (см. рис. 75). Ответ: корней нет.

6) $\frac{\cos x}{\cos 7x} = 0$. Решение: О.О.У. $\cos 7x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Но при $n = 3 + 7k$ видно, что эти корни не удовлетворяют ОО (см. рис. 76). Ответ: корней нет.

679. 1) $\cos x \sin 5x = -1$. Решение: поскольку $|\cos x| \leq 1$, $|\sin 5x| \leq 1$, то

$\cos x \sin 5x = -1$ только если $\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin 5x = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin 5x = 1 \end{cases}$. Из первой системы

темы $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{2\pi n}{5} - \frac{\pi}{10}$, $n \in \mathbb{Z}$. Решения не совпадают ни

при каких n, k . Аналогично в случае второй системы. Ответ: решений нет.

2) Аналогично 1).

680. Указание: воспользуйтесь формулами тройного угла: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ и $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Получившиеся уравнения

разделите на $\cos^3 x$ и воспользуйтесь формулой $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. См. задачу 681.

681. 1) $\sin 2x + \cos 2x = 2 \operatorname{tg} x + 1$. Решение: область определения уравнения

$\cos x \neq 0$. Левая часть: $\sin 2x + \cos 2x = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 =$

$$= \cos^2 x \left(2 \operatorname{tg} x + 2 - \frac{1}{\cos^2 x} \right) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} (2 \operatorname{tg} x + 2 - 1 - \operatorname{tg}^2 x) = \frac{-\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Сделаем замену $\operatorname{tg} x = u$, тогда уравнение примет вид:

$$\frac{-u^2 + 2u + 1}{1 + u^2} = 2u + 1, \quad -u^2 + 2u + 1 = 2u^3 + u^2 + 2u + 1, \quad 2u^3 + 2u^2 = 0,$$

да $u = 0$ или $u = -1$. Возвращаясь к исходной неизвестной, находим

$$x = \pi k \text{ или } x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \text{ Ответ: } x = \pi k, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

2) Аналогично 1).

682. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$. Решение: перенесем все в левую часть и

$$\text{преобразуем: } \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 4x + 2 \cos 4x \cos 2x) = \frac{1}{2} \cos 4x (2 \cos 2x + 1). \text{ Таким образом, получим}$$

$$\frac{1}{2} \cos 4x (2 \cos 2x + 1) = 0, \text{ откуда } \cos 4x = 0 \text{ или } \cos 2x = -\frac{1}{2}. \text{ Из первого}$$

уравнения $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, а из второго $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

683. $\sqrt{-4 \cos x \cos^2 x} = \sqrt{7 \sin 2x}$. Решение: возведем обе части уравнения в квадрат и преобразуем: $-4 \cos x \cos^2 x = 14 \sin x \cos x$. $\cos x = 0$ – решение

(причем оно удовлетворяет О.О.), откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$. Если

$\cos x \neq 0$, то $-2 \cos^2 x = 7 \sin x$, $2(\sin^2 x - 1) - 7 \sin x = 0$, откуда

$$\sin x = \frac{7 - \sqrt{65}}{4} \in [-1; 1] \text{ или } \sin x = \frac{7 + \sqrt{65}}{4} > 1. \text{ Из первого уравнения}$$

$$x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{7 - \sqrt{65}}{4}\right) + \pi k. \text{ При четных } k$$

$$x = \arcsin\left(\frac{7 - \sqrt{65}}{4}\right) + 2\pi n \approx -\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n - \text{ угол четвертой четверти, а}$$

значит, не удовлетворяет ОО (т.к. его косинус положительный). При не-

четных k , $x = -\arcsin\left(\frac{7-\sqrt{65}}{4}\right) + 2\pi n + \pi = \pi + \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$ – угол третьей

четверти, который удовлетворяет области определения (т.к. его косинус и синус отрицательные).

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \pi + \arcsin\left(\frac{\sqrt{65}-7}{4}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

684. Указание: рассмотрите два случая: косинус больше или меньше нуля. В первом случае в левой части воспользуйтесь формулой разности косинусов, во втором – формулой суммы косинусов.

685. 1) $\begin{cases} \sin y \cos y = 1/2 \\ \sin 2x + \sin 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2y = 1 \\ 2\sin(x+y)\cos(x-y) = 0 \end{cases}$, тогда из первого

уравнения $y = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, а из второго уравнения $x + y = \pi k$, либо

$x - y = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Откуда и находим окончательный ответ.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: домножьте первое уравнение на 3 и вычтите из второго, тогда:

$$\text{да: } (\cos x - \sqrt{3} \sin x) - (\cos y + \sqrt{3} \sin y) = 2 \left(\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(y - \frac{\pi}{3}\right) \right) =$$

$$= -4 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

686. 1) Указание: если сложить уравнения системы, то после преобразований

получится $\sin(x+y) - \sin 2y = 0$, т.е. $2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+3y}{2} = 0$.

2) $\begin{cases} \sin x \cos y = 1/2 \\ \cos x \sin y = -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pi k \\ x - y = \pi/2 + 2\pi n \end{cases}$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

Решение: сложим уравнение системы, тогда $\sin(x+y) = 0$. Если же от первого уравнения отнять второе, то $\sin(x-y) = 1$. Откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} + \pi n \text{ и } y = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} - \pi n. \text{ Ответ: } \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} - \pi n \right),$$

$$n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}.$$

687. Решение: преобразуем левую часть:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x. \text{ Таким обра-}$$

зом $\sin^2 2x = 2(1-a)$. Т.к. $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$, то необходимо $0 \leq 2(1-a) \leq 1$,

откуда $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$. При таких a справедливо $x = \pm \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{2-2a} + \pi k$,

$$k \in \mathbf{Z}. \text{ Ответ: } x = \pm \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{2-2a} + \pi k, k \in \mathbf{Z}, \frac{1}{2} \leq a \leq 1.$$

688. Указание: используйте тождество: $\sin^{10} x + \cos^{10} x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^5 -$

$$-\frac{5}{2} \sin^2 2x \left((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right) - 5 \sin^2 2x (\sin^2 x + \cos^2 x). \text{ Анало-}$$

гично задаче 687.

$$689. \sin 2x - 2a\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1 - 6a^2 = 0.$$

Решение: сделаем замену $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = u$, тогда:

$\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = u^2 - 1$, т.е. $u^2 - 2a\sqrt{2}u - 6a^2 = 0$. Найдем корни этого квадратного трехчлена, $u_1 = -a\sqrt{2}$ и $u_2 = 3a\sqrt{2}$. Т.к. $|u| \leq \sqrt{2}$, то

если $|a| \leq \frac{1}{3}$, то оба уравнения $\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -a\sqrt{2}$ и

$\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 3a\sqrt{2}$ имеют решения. Т.е. $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos 3a + 2\pi k$,

$x = \frac{\pi}{4} \pm (\pi - \arccos a) + 2\pi k$. Если $\frac{1}{3} < |a| \leq 1$, существует только решение

$x = \frac{\pi}{4} \pm (\pi - \arccos a) + 2\pi k$, а если $|a| > 1$, то решений нет.

Ответ: если $|a| \leq \frac{1}{3}$, то $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos 3a + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{4} \pm (\pi - \arccos a) + 2\pi k$;

если $\frac{1}{3} < |a| \leq 1$, то $x = \frac{\pi}{4} \pm (\pi - \arccos a) + 2\pi k$; если $|a| > 1$, решений нет.

690. 1) $2 \cos^2 x + \sin x - 1 < 0$. Решение: сделаем замену переменных $\sin x = u$, $|u| \leq 1$. Тогда $2(1 - u^2) + u - 1 < 0$; $2u^2 - u - 1 > 0$;

$(u - 1)(2u + 1) > 0$, откуда $u > 1$ или $u < -\frac{1}{2}$. Первое неравенство не имеет решений, а второе, по формуле из §37, имеет решения

$$-\pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$

Глава VII

Тригонометрические функции

§38. Область определения и множество значений тригонометрических функций

Основные понятия:

$y = \sin x$. Множество определения $x \in \mathbf{R}$, множество значений $[-1; 1]$.

$y = \cos x$. Множество определения $x \in \mathbf{R}$, множество значений $[-1; 1]$.

$y = \operatorname{tg} x$. Множество определения $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$, $k \in \mathbf{Z}$,
множество значений \mathbf{R} .

691. 1) $y = \sin 2x$, $x \in \mathbf{R}$.

2) $y = \cos \frac{x}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

3) $y = \cos \frac{1}{x}$. Решение: необходимо, чтобы было определено $\frac{1}{x}$, т.е. $x \neq 0$.

4) $y = \sin \frac{2}{x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

5) $y = \sin \sqrt{x}$. Решение: $\sqrt{x} \geq 0$, т.е. $x \geq 0$. Ответ: $x \geq 0$.

6) $y = \cos \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. Решение: $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$, т.е. $x \geq 1$ и $x < -1$. Ответ: $x \geq 1$, $x < -1$

692. 1) $y = 1 + \sin x$. Решение: $-1 \leq \sin x \leq 1$, $0 \leq \sin x + 1 \leq 2$. Ответ: $0 \leq y \leq 2$.

2) $y = 1 - \cos x$. Решение: $-1 \leq \cos x \leq 1$, $0 \leq 1 - \cos x \leq 2$. Ответ: $0 \leq y \leq 2$.

3) $y = 2 \sin x + 3$. Решение: $-2 \leq 2 \sin x \leq 2$, $1 \leq 2 \sin x + 3 \leq 5$.

Ответ: $1 \leq y \leq 5$.

4) $y = 1 - 4 \cos 2x$. Решение: $-1 \leq \cos 2x \leq 1$, $-3 \leq 1 - 4 \cos 2x \leq 5$.

Ответ: $-3 \leq y \leq 5$.

5) $y = \sin 2x \cos 2x + 2$. Решение: $\sin 2x \cos 2x + 2 = \frac{1}{2} \sin 4x + 2$, но

$-1 \leq \sin 4x \leq 1$, откуда $1 \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 4x + 2 \leq 2 \frac{1}{2}$. Ответ: $1 \frac{1}{2} \leq y \leq 2 \frac{1}{2}$.

693. 1) $y = \frac{1}{\cos x}$. Решение: необходимо, чтобы было определено выражение

$\frac{1}{\cos x}$. Т.е. $\cos x \neq 0$; $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $y = \frac{2}{\sin x}$. Решение: необходимо, чтобы было определено выражение

$\frac{2}{\sin x}$. Т.е. $\sin x \neq 0$; $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$. Решение: тангенс определен, если аргумент не равен $\frac{\pi}{2} + \pi k$,

т.е. $\frac{x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x \neq \frac{3\pi}{2} + 3\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x \neq \frac{3\pi}{2} + 3\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) $y = \operatorname{tg} 5x$. Решение: тангенс определен, если аргумент не равен $\frac{\pi}{2} + \pi k$,

$k \in \mathbf{Z}$, т.е. $5x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$.

694. 1) $y = \sqrt{\sin x + 1}$. Решение: необходимо, чтобы существовал $\sqrt{\sin x + 1}$, т.е. $\sin x + 1 \geq 0$, $\sin x \geq -1$, что верно при любых x . Ответ: $x \in \mathbf{R}$.

2) $y = \sqrt{\cos x - 1}$. Решение: т.к. $\cos x \leq 1$, то $\cos x - 1 \leq 0$. Поэтому необходимо, чтобы $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $y = \lg \sin x$. Решение: необходимо $\sin x > 0$, т.е. $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$.
Ответ: $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) $y = \sqrt{2 \cos x - 1}$. Решение: необходимо, чтобы $2 \cos x - 1 \geq 0$, $\cos x \geq \frac{1}{2}$,

т.е. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

5) $y = \sqrt{1 - 2 \sin x}$. Решение: необходимо, чтобы $1 - 2 \sin x \geq 0$, $\sin x \leq \frac{1}{2}$,

т.е. $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k$. Ответ: $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

6) $y = \ln \cos x$. Решение: необходимо $\cos x > 0$, т.е. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

695. 1) Указание: $2\sin^2 x - \sin x = \sin x(2\sin x - 1)$, таким образом необходи-

мо, чтобы $\sin x \neq 1$ и $\sin x \neq \frac{1}{2}$.

2) Указание: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, т.е. необходимо, чтобы $\cos 2x \neq 0$.

3) $y = \frac{1}{\sin x - \sin 3x}$. Решение: $\sin x - \sin 3x = -2\sin x \cos 2x \neq 0$, т.е. $\sin x \neq 0$

и $\cos 2x \neq 0$, т.е. $x \neq \pi k$ и $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. Ответ: $x \neq \pi k$, $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4) $y = \frac{1}{\cos^3 x + \cos x}$. Решение: $\cos^3 x + \cos x = \cos x(\cos^2 x + 1)$. Поскольку

$\cos^2 x + 1 > 0$ при всех x , то необходимо $\cos x \neq 0$, т.е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

696. 1) $y = 2\sin^2 x - \cos x$. Решение: $2\sin^2 x - \cos 2x = 2\sin^2 x - (1 - 2\sin^2 x) = 4\sin^2 x - 1$

но $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, т.е. $-1 \leq 4\sin^2 x - 1 \leq 3$. Ответ: $-1 \leq y \leq 3$.

2) $y = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$. Решение: $1 - 8\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 2x$, но

$0 \leq \sin^2 2x \leq 1$, т.е. $-1 \leq 1 - 2\sin^2 2x \leq 1$. Ответ: $-1 \leq y \leq 1$.

3) $y = \frac{1 + 8\cos^2 x}{4}$. Решение: т.к. $0 \leq \cos^2 x \leq 1$, то $1 \leq 1 + 8\cos^2 x \leq 9$, отку-

да $\frac{1}{4} \leq \frac{1 + 8\cos^2 x}{4} \leq \frac{9}{4}$. Ответ: $\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{9}{4}$.

4) $y = 10 - 9\sin^2 3x$. Решение: т.к. $0 \leq \sin^2 3x \leq 1$, то $1 \leq 10 - 9\sin^2 3x \leq 10$.

Ответ: $1 \leq y \leq 10$.

5) $y = 1 - 2|\cos x|$. Решение: т.к. $0 \leq |\cos x| \leq 1$, то $-1 \leq 1 - 2|\cos x| \leq 1$.

Ответ: $-1 \leq y \leq 1$.

6) $y = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Решение: $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} =$

$= \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Функция синус (от аргумента $t = x + \frac{\pi}{6}$) принимает все

значения в промежутке $[-1; 1]$, поэтому $-\sqrt{3} \leq \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \sqrt{3}$.

Ответ: $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$.

697. Решение: $3 \cos 2x - 4 \sin 2x = 5 \left(\frac{3}{5} \cos 2x - \frac{4}{5} \sin 2x \right) =$
 $= 5(\cos \varphi \cos 2x - \sin \varphi \sin 2x) = 5 \cos(\varphi + 2x)$, где угол φ такой, что
 $\cos \varphi = \frac{3}{5}$, $\sin \varphi = \frac{4}{5}$. Такой угол существует, так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$. По-
 скольку $-1 \leq \cos(\varphi + 2x) \leq 1$, то $-5 \leq 5 \cos(\varphi + 2x) \leq 5$.
 Ответ: наибольшее значение функции 5, наименьшее значение - 5.

698. Решение: $\sin x - 5 \cos x = \sqrt{26} \left(\frac{1}{\sqrt{26}} \sin x - \frac{5}{\sqrt{26}} \cos x \right) =$
 $= \sqrt{26}(\cos \varphi \sin x - \sin \varphi \cos x) = \sqrt{26} \sin(\varphi - x)$, где угол φ такой, что
 $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{26}}$, $\sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{26}}$. Такой угол существует, т.к. $\frac{1}{26} + \frac{25}{26} = 1$. По-
 скольку $-1 \leq \sin(\varphi - x) \leq 1$, $-\sqrt{26} \leq \sqrt{26} \sin(\varphi - x) \leq \sqrt{26}$.
 Ответ: наибольшее значение $\sqrt{26}$, наименьшее значение $-\sqrt{26}$.

699. $y = 10 \cos^2 x - 6 \cos x \sin x + 2 \sin^2 x$.

Решение: преобразуем выражение: $10 \cos^2 x - 6 \cos x \sin x + 2 \sin^2 x =$
 $= 5(1 + \cos 2x) - 3 \sin 2x + (1 - \cos 2x) = 4 \cos 2x - 3 \sin 2x + 6$. Аналогично за-
 даче 697 получаем $4 \cos 2x - 3 \sin 2x = \cos(\varphi + 2x)$, где $\cos \varphi = \frac{4}{5}$, $\sin \varphi = \frac{3}{5}$.
 Окончательно $y = \cos(\varphi + 2x) + 6$, откуда $5 \leq y \leq 7$. Ответ: $5 \leq y \leq 7$.

§39. Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций

Основные понятия:

Функция $f(x)$ называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$ для любого x из области определения функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$ для любого x из области определения функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения функции $f(x)$.

Число T называется *периодом* функции $f(x)$.

700. 1) $y = \cos 3x$. Решение: $y(-x) = \cos 3(-x) = \cos 3x = y(x)$, т.е. функция четная.

2) $y = 2 \sin 4x$. Решение: $y(-x) = 2 \sin(-4x) = -2 \sin 4x = -y(x)$, т.е. функция нечетная.

3) $y = \frac{x}{2} \operatorname{tg}^2 x$. Решение: $y(-x) = \frac{(-x)}{2} \operatorname{tg}^2(-x) = -\frac{x}{2} (-\operatorname{tg} x)^2 = -\frac{x}{2} \operatorname{tg}^2 x = -y(x)$, т.е. функция нечетная.

4) $y = x \cos \frac{x}{2}$. Решение: $y(-x) = -x \cos\left(-\frac{x}{2}\right) = -x \cos \frac{x}{2} = -y(x)$, т.е. функция нечетная.

5) $y = x \sin x$. Решение: $y(-x) = -x \sin(-x) = x \sin x = y(x)$, т.е. функция четная.

6) $y = 2 \sin^2 x$. Решение: $y(-x) = 2 \sin^2(-x) = 2 \sin^2 x = y(x)$, т.е. функция четная.

701. 1) $y = \sin x + x$. Решение: $y(-x) = \sin(-x) + (-x) = -(\sin x + x) = -y(x)$, т.е. функция нечетная.

2) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - x^2$. Решение: поскольку $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$, получаем $y(-x) = \sin(-x) - (-x)^2 = -\sin x - x^2$, т.е. функция общего вида.

3) $y = 3 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi - x)$. Решение: т.к. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi - x) = -\sin^2 x$, то $y(-x) = 3 + \sin^2(-x) = 3 + \sin^2 x = y(x)$, т.е. функция четная.

4) $y = \frac{1}{2} \cos 2x \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2x\right) + 3$. Решение: т.к. $\cos 2x \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2x\right) = -\cos 3x$, то $y(-x) = -\frac{1}{2} \cos(-3x) + 3 = -\frac{1}{2} \cos 3x + 3 = y(x)$, т.е. функция четная.

5) $y = \frac{\sin x}{x} + \sin x \cos x$. Решение: $y(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)} + \sin(-x) \cos(-x) = \frac{-\sin x}{-x} - \sin x \cos x = \frac{\sin x}{x} - \sin x \cos x$, т.е. функция общего вида.

6) $y = x^2 + \frac{1 + \cos x}{2}$. Решение: $(-x)^2 + \frac{1 + \cos(-x)}{2} = x^2 + \frac{1 + \cos x}{2}$, т.е. функция четная.

702. 1) $y = \cos x - 1$. Решение: $y(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) - 1 = \cos x - 1 = y(x)$, ч.т.д.

2) $y = \sin x + 1$. Решение: $y(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + 1 = \sin x + 1 = y(x)$, ч.т.д.

3) $y = 3 \sin x$. Решение: $y(x + 2\pi) = 3 \sin(x + 2\pi) = 3 \sin x = y(x)$, ч.т.д.

4) $y = \frac{\cos x}{2}$. Решение: $y(x + 2\pi) = \frac{\cos(x + 2\pi)}{2} = \frac{\cos x}{2} = y(x)$, ч.т.д.

5) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Решение: $y(x + 2\pi) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = y(x)$.

6) $y = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$. Решение: $y(x + 2\pi) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = y(x)$.

703. 1) $y(x + T) = \sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x = y(x)$, ч.т.д.

2) $y(x + T) = \cos\left(\frac{x + 4\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = \cos \frac{x}{2} = y(x)$, ч.т.д.

3) $y(x + T) = \operatorname{tg}(2x + \pi) = \operatorname{tg}(2x) = y(x)$, ч.т.д.

4) $y(x + T) = \sin\left(\frac{4x}{5} + \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 2} \pi\right) = \sin\left(\frac{4x}{5} + 2\pi\right) = \sin \frac{4x}{5} = y(x)$, ч.т.д.

704. 1) $y(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{1 + \cos(-x)} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = y(x)$, т.е. функция четная.

2) $y(-x) = \frac{\sqrt{\sin^2(-x)}}{1 + \cos(-2x)} = \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{1 + \cos 2x} = y(x)$, т.е. функция четная.

3) $y(-x) = \frac{\cos(-2x) - (-x)^2}{\sin(-x)} = \frac{\cos 2x - x^2}{-\sin x} = -y(x)$, т.е. функция нечетная.

4) $y(-x) = \frac{(-x)^3 + \sin(-2x)}{\cos(-x)} = \frac{-x^3 - \sin 2x}{\cos x} = -y(x)$, т.е. функция нечетная.

5) $3^{\cos(-x)} = 3^{\cos x}$, т.к. $\cos(-x) = \cos x$, т.е. функция четная.

6) $y(-x) = (-x)|\sin(-x)|\sin^3(-x) = -x|\sin x|(-\sin x)^3 = x|\sin x|\sin^3 x = y(x)$, т.е. функция четная.

705. 1) $y = \cos \frac{2}{5}x$. Решение: пусть T – период, тогда $\cos \frac{2}{5}(x + T) = \cos \frac{2}{5}x$.

Подставим $x = 0$, получим $\cos\left(\frac{2T}{5}\right) = \cos 0 = 1$, откуда $\frac{2T}{5} = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

$T = 5\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Т.к. наименьшее положительное k равно 1, то наименьший положительный период равен 5π . Ответ: $T = 5\pi$.

2) $y = \sin \frac{3}{2}x$. Решение: пусть T – период, тогда $\sin \frac{3}{2}(x + T) = \sin \frac{3}{2}x$.

Подставим $x = 0$, получим $\sin\left(\frac{3T}{2}\right) = \sin 0 = 0$, откуда $\frac{3T}{2} = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

$T = \frac{4}{3}\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Т.к. наименьшее положительное k равно 1, то наименьший положительный период равен $\frac{4}{3}\pi$. Ответ: $T = \frac{4}{3}\pi$.

3) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Решение: пусть T – период, тогда $\operatorname{tg} \frac{(x+T)}{2} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Подставим

$x = 0$, получим $\operatorname{tg} \left(\frac{T}{2} \right) = \operatorname{tg} 0 = 0$, откуда $\frac{T}{2} = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $T = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Т.к. наименьшее положительное k равно 1, то наименьший положительный период равен 2π . Ответ: $T = 2\pi$.

4) $y = |\sin x|$. Решение: пусть T – период, тогда $|\sin(x+T)| = |\sin x|$. Подставим $x = 0$, получим $\sin T = 0$, откуда $T = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Т.к. наименьшее положительное k равно 1, то наименьший положительный период равен π .
Ответ: π .

706. 1) Указание: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$. Аналогично задаче 705. Под-

ставьте точку $x = \frac{\pi}{4}$.

2) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$. Решение: пусть T – период, тогда $\sin(x+T) + \operatorname{tg}(x+T) = \sin x + \operatorname{tg} x$. Подставим $x = 0$, получим $\sin T + \operatorname{tg} T = 0$. $\sin T \left(1 + \frac{1}{\cos T} \right) = 0$, откуда $T = \pi k$ или $T = -\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Т.к. при k равном 1, число π не является периодом, то проверим $k = 2$, откуда наименьший положительный период равен 2π . Ответ: 2π .

707. 1) $y(x) = f(x) + f(-x)$. $y(-x) = f(-x) + f(x) = y(x)$, т.е. функция четная.

2) $y(x) = f(x) - f(-x)$. $y(-x) = f(-x) - f(x) = -(f(x) - f(-x)) = -y(x)$, т.е. функция нечетная.

Для любой функции $f(x)$ справедливо равенство:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

§40. Свойства функции $y = \cos x$ и ее график

Свойства:

1°. Область определения – \mathbf{R} .

2°. Множество значений – отрезок $[-1; 1]$.

3°. Функция $y = \cos x$ периодическая, наименьший положительный период равен 2π .

4°. Функция $y = \cos x$ четная.

5°. Функция $y = \cos x$ принимает положительные значения на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, отрицательные при $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

6°. Функция $y = \cos x$ возрастает на отрезках $(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$ и убывает на отрезках $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

710. Указание: воспользуйтесь свойством 6°.

711. 1) $\cos \frac{\pi}{7}$ и $\cos \frac{8\pi}{9}$. Решение: т.к. данные числа принадлежат отрезку

$(0; \pi)$, где $y = \cos x$ убывает, и $\frac{\pi}{7} < \frac{8\pi}{9}$, то $\cos \frac{\pi}{7} > \cos \frac{8\pi}{9}$.

2) $\cos \frac{8\pi}{7}$ и $\cos \frac{10\pi}{7}$. Решение: т.к. данные числа принадлежат отрезку

$(\pi; 2\pi)$, где $y = \cos x$ возрастает, и $\frac{8\pi}{7} < \frac{10\pi}{7}$, то $\cos \frac{8\pi}{7} < \cos \frac{10\pi}{7}$.

3) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$. Решение: т.к. данные числа принадлежат отрезку

$(-\pi; 0)$, где $y = \cos x$ возрастает, и $-\frac{6\pi}{7} < -\frac{\pi}{8}$, то $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right) < \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$.

4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$. Решение: данные числа принадлежат отрезку

$(-2\pi; -\pi)$, где $y = \cos x$ убывает, то $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right) < \cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$.

5) $\cos 1$ и $\cos 3$. Решение: числа 1 и 3 принадлежат отрезку $(0; \pi)$, где $y = \cos x$ убывает, поэтому $\cos 1 > \cos 3$.

6) $\cos 4$ и $\cos 5$. Решение: числа 4 и 5 принадлежат отрезку $(\pi; 2\pi)$, где $y = \cos x$ возрастает, поэтому $\cos 4 < \cos 5$.

712. 1) $\cos x = \frac{1}{2}$. Решение: по формуле корней $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из

этих корней подходят только корни $\frac{\pi}{3}$, $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi$. Ответ: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$.

2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение: по формуле корней $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из

этих корней подходят только корни $\frac{\pi}{4}$, $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$.

3) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение: по формуле корней $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из

этих корней подходят корни $\frac{3\pi}{4}$, $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi$. Ответ: $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$.

4) $\cos x = -\frac{1}{2}$. Решение: по формуле корней $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из

этих корней подходят корни $\frac{2\pi}{3}$, $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi$. Ответ: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$.

713. Аналогично задачам 712, 716.

714. 1) $\cos \frac{\pi}{5}$ и $\sin \frac{\pi}{5}$. Решение: Т.к. $\sin \frac{\pi}{5} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \frac{3\pi}{10}$, оба числа принадлежат промежутку $(0; \pi)$, где $y = \cos x$ убывает. Т.е. $\cos \frac{\pi}{5} > \sin \frac{\pi}{5}$.

2) $\sin \frac{\pi}{7}$ и $\cos \frac{\pi}{7}$. Решение: Т.к. $\sin \frac{\pi}{7} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} \right) = \cos \frac{5\pi}{14}$, оба числа принадлежат промежутку $(0; \pi)$, где $y = \cos x$ убывает. Т.е. $\sin \frac{\pi}{7} < \cos \frac{\pi}{7}$.

3) $\cos \frac{3\pi}{8}$ и $\sin \frac{3\pi}{8}$. Решение: Т.к. $\sin \frac{3\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8}$, оба числа принадлежат промежутку $(0; \pi)$, где $y = \cos x$ убывает. Т.е. $\cos \frac{3\pi}{8} < \sin \frac{3\pi}{8}$.

4) $\sin \frac{3\pi}{5}$ и $\cos \frac{\pi}{5}$. Решение: Т.к. $\sin \frac{3\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{10}$, оба числа принадлежат промежутку $(0; \pi)$, где $y = \cos x$ убывает. Т.е. $\sin \frac{3\pi}{5} > \cos \frac{\pi}{5}$.

5) $\cos \frac{\pi}{6}$ и $\sin \frac{5\pi}{14}$. Решение: Т.к. $\sin \frac{5\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{7}$, оба числа принадлежат промежутку $(0; \pi)$, где $y = \cos x$ убывает. Т.е. $\cos \frac{\pi}{6} < \sin \frac{5\pi}{14}$.

6) $\cos \frac{\pi}{8}$ и $\sin \frac{3\pi}{10}$. Решение: Т.к. $\sin \frac{3\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{5}$, оба числа принадлежат промежутку $(0; \pi)$, где $y = \cos x$ убывает. Т.е. $\cos \frac{\pi}{8} > \sin \frac{3\pi}{10}$.

715. 1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Решение: по формуле корней $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из этих

корней подходят только корни $\pm \frac{\pi}{6}$, $\pm \frac{\pi}{6} + \pi$. Ответ: $\pm \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$.

2) Аналогично 1).

716. 1) $\cos 2x < \frac{1}{2}$. Решение: по формуле из §37 находим решения этого неравенства

промежутка $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k$. Из них подходят только следующие промежутки:

$$-\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \quad \text{и} \quad \frac{7\pi}{6} < x \leq \frac{3\pi}{2}.$$

2) Аналогично 1).

717. 1) Указание: график функции $y = 1 + \cos x$ получается из графика функции $y = \cos x$ сдвигом на одну единицу вверх.

2) Указание: см. рис. 77, свойства функции следуют из вида ее графика.

3) Указание: график функции $y = 3 \cos x$ получается из графика функции $y = \cos x$ вертикальным растяжением в три раза, см. рис. 78.

718. 1) См. рис. 79; 2) См. рис. 80.

719. 1) Указание: график функции $y = |\cos x|$ получается из графика функции $y = \cos x$ симметричным отражением относительно оси OX той части графика, где $y < 0$. См. рис. 81.

2) Указание: постройте последовательно графики функций $y = \cos(x-1)$, $y = -2 \cos(x-1)$, $y = 3 - 2 \cos(x-1)$. См. рис. 82.

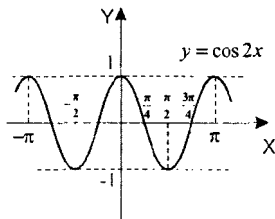


Рис. 77

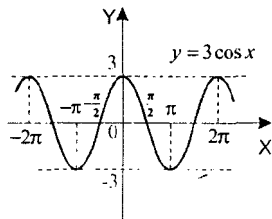


Рис. 78

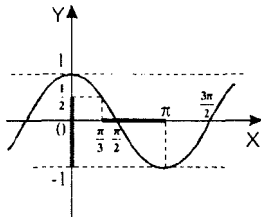


Рис. 79

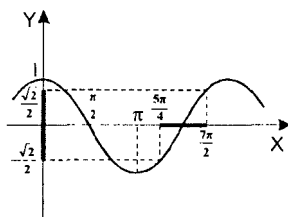


Рис. 80

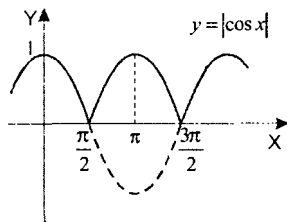


Рис. 81

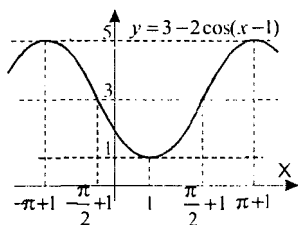


Рис. 82

§41. Свойства функции $y = \sin x$ и ее график

Свойства:

1°. Область определения – \mathbf{R} .

2°. Множество значений – отрезок $[-1; 1]$.

3°. Функция $y = \sin x$ периодическая, наименьший положительный период равен 2π .

4°. Функция $y = \sin x$ нечетная.

5°. Функция $y = \sin x$ принимает положительные значения на интервалах $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ и отрицательные на интервалах $(2\pi k - \pi; 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

6°. Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ и убывает на отрезках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

722. Указание: воспользуйтесь свойством 6°.

723. Аналогично задаче 726.

724. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Решение: по формуле корней находим $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$,

$k \in \mathbf{Z}$. Из них условию удовлетворяют только корни $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3} - \pi$,

$\frac{\pi}{3} + 2\pi$, $-\frac{\pi}{3} + 3\pi$. Ответ: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$.

2)–4) Аналогично 1).

725. 1), 3), 4) Аналогично 2).

2) $\sin x \geq -\frac{1}{2}$. Решение: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из них усло-

вию удовлетворяют только $0 \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6} \leq x \leq 3\pi$.

726. 1) $\sin \frac{\pi}{9}$ и $\cos \frac{\pi}{9}$. Решение: по формуле приведения получаем:

$$\cos \frac{\pi}{9} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9} \right) = \sin \frac{7\pi}{18}. \text{ Так как } \frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{18} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \text{ где синус возрастает, и } \frac{\pi}{9} < \frac{7\pi}{18}, \text{ то } \sin \frac{\pi}{9} < \cos \frac{\pi}{9}.$$

2)–4) Аналогично 1).

727. Аналогично задачам 715, 724.

728. Аналогично задачам 716, 725.

729. 1) Указание: график функции $y = 1 - \sin x$ получается из графика функции $y = -\sin x$ сдвигом на одну единицу вверх.

2) Указание: график функции $y = 1 + \sin x$ получается из графика функции $y = \sin x$ сдвигом на одну единицу вверх.

3) Указание: см. рис. 83.

4) Указание: см. рис. 84.

730. Указание: решите задачу графически, аналогично задаче 718.

731. 1) Указание: график $y = \sin|x|$ получается из графика $y = \sin x$ симметричным отражением относительно ОУ части графика при $x \geq 0$ (рис. 85).

2) Указание: график $y = |\sin x|$ получается из графика $y = \sin x$ симметричным отражением относительно ОХ той части графика, где $y < 0$ (рис. 86).

732. 1) Указание: график $y = 2 \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)$ получается из графика $y = 2 \sin t$

сдвигом на $\frac{\pi}{4}$ влево. Воспользуйтесь рисунком 84.

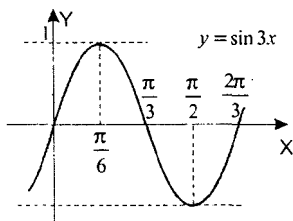


Рис. 83

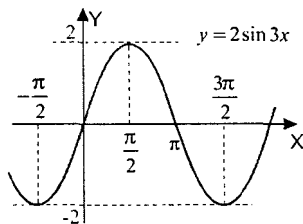


Рис. 84

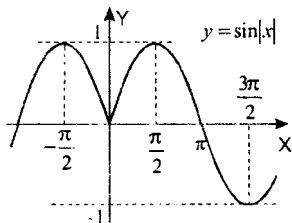


Рис. 85

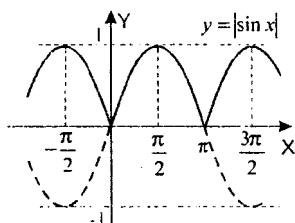


Рис. 86

2) Указание: график

$y = \sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$ получается

из графика $y = \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$

сжатием вдоль оси OX в два раза (см. рисунок 87).

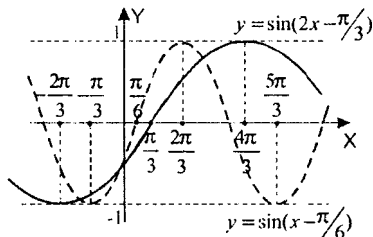


Рис. 87

§42. Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее график

Свойства:

1°. Область определения – $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2°. Множество значений – \mathbf{R} .

3°. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая, наименьший положительный период равен π .

4°. Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная.

5°. Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает положительные значения на интервалах

$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ и отрицательные на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

6°. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

735. 1)–3) Аналогично 4).

4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$. Решение: так как тангенс нечетная функция, то

надо сравнить $-\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$ и $-\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$. Числа $\frac{\pi}{5}$ и $\frac{\pi}{7}$ принадлежат промежутку

возрастания ф-ции $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, т.е. $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} > \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$, а значит $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right) < \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$.

5) Указание: числа 2 и 3 принадлежат промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, на котором функция возрастает.

6) Указание: числа 1 и 1,5 принадлежат промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, на котором функция возрастает.

736. Указание: найдите корни уравнения по общей формуле, выберите из них те, которые удовлетворяют условию. Аналогично задачам 712, 724 и 739.

737. Аналогично задаче 2 §42.

738. Указание: решите неравенство графически, аналогично задаче 740.

739. Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 3\pi]$.

1) $\operatorname{tg} x = 3$. Решение: корни уравнения находятся по формуле

$x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Т.к. по определению $\operatorname{arctg} 3 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то подходят только корни $x = \operatorname{arctg} 3$, $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi$ и $x = \operatorname{arctg} 3 + 2\pi$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 3$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi$, $\operatorname{arctg} 3 + 2\pi$.

2) Аналогично 1).

740. 1) $\operatorname{tg} x > 4$. Решение: построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 4$ (см. рис. 88). Эти графики пересекаются в точках вида $x = \operatorname{arctg} 4 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Тогда, как видно из рисунка, нам подходят промежутки

$\left(\operatorname{arctg} 4 + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $\left(\operatorname{arctg} 4 + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

2)–4) Аналогично 1).

741. Указание: решите задачу графически, аналогично задачам 716 и 728.

742. 1) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$. Решение: $2x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Условию удовлетворяют $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{2\pi}{3}$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{2\pi}{3}$.

2) Указание: из корней $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$ условию удовлетворяют только

$x = -\frac{5\pi}{12}$, $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{12}$, $x = 11\frac{\pi}{12}$.

743. 1) $\operatorname{tg} 2x \geq 1$. Решение: по графику функции $y = \operatorname{tg} 2x$ (см. рис. 89) нахо-

дим, что решения, удовлетворяющие условию, имеют вид $-\frac{3\pi}{8} \leq x < -\frac{\pi}{4}$,

$\frac{\pi}{8} \leq x < \frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{8} \leq x < \frac{3\pi}{4}$. 2) Аналогично 1).

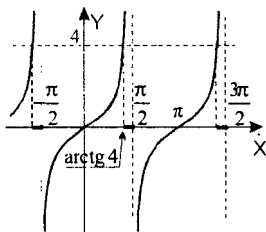


Рис. 88

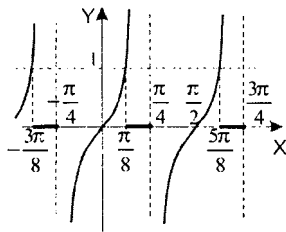


Рис. 89

744. 1) Указание: график $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ получается из графика $y = \operatorname{tg} x$ сдвигом на $\frac{\pi}{4}$ влево. Аналогично 2).

2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Решение: график $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ получается из графика $y = \operatorname{tg} x$ растяжением в два раза по оси OX . Т.е. свойства этой функции такие: область определения – $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; множество значений – \mathbf{R} ; функция $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ периодическая, наименьший положительный период равен 2π ; нечетная, принимает положительные значения на интервалах $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ и отрицательные на интервалах $(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$; возрастает на отрезках $(-\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$. График функции см. на рис. 90.

745. Указание: воспользуйтесь графиком функции $y = \operatorname{tg} x$.

746. 1) Указание: график $y = \operatorname{tg}|x|$ получается из графика $y = \operatorname{tg} x$ симметричным отражением относительно оси OY части графика при $x \geq 0$.

2) Указание: график $y = |\operatorname{tg} x|$ получается из графика $y = \operatorname{tg} x$ симметричным отражением относительно оси OX той части графика, где $y < 0$.

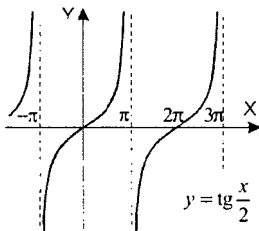


Рис. 90

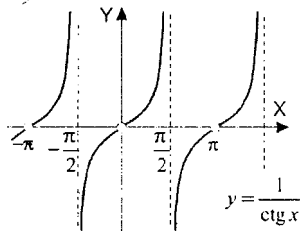


Рис. 91

3) Указание: т.к. $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, то график $y = \operatorname{ctg} x$ получается из графика функции $y = -\operatorname{tg} x$ сдвигом на $\frac{\pi}{2}$ вправо.

4) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$. Решение: область определения функции состоит из множества, где определен и не равен нулю $\operatorname{ctg} x$, т.е. $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Т.к.

$\frac{1}{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg} x$, то на всей области определения график совпадает с графиком функции $y = \operatorname{tg} x$, см. рис. 91.

747. 1) Указание: $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$ при $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. См. рис. 92.

2) Указание: $\sin x \operatorname{ctg} x = \cos x$ при $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. См. рис. 93.

748. 1) Указание: $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(3\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\right)$, аналогично 2).

2) $y = \operatorname{ctg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$. Решение: построим график функции $y = \operatorname{ctg} x$, из него сдвигом на $\frac{\pi}{6}$ единиц влево получается график $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Те-

перь график $y = \operatorname{ctg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$ получается из графика $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

сжатием в три раза вдоль оси Ox относительно точки $-\frac{\pi}{6}$. См. рис. 94.

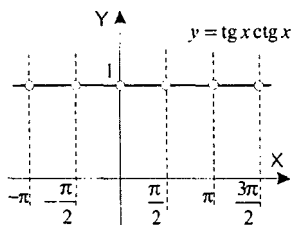


Рис. 92

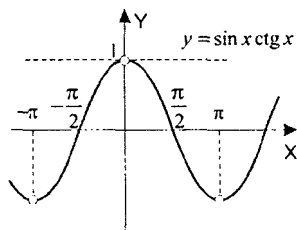


Рис. 93

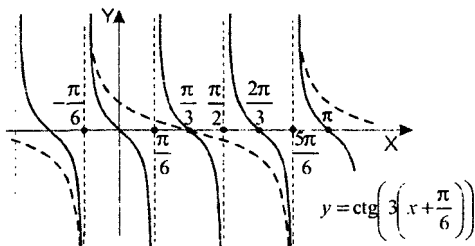


Рис. 94

749. 1) $\operatorname{tg}^2 x < 1$. Решение: данное неравенство равносильно неравенству

$-1 < \operatorname{tg} x < 1$. По графику функции $y = \operatorname{tg} x$, находим решения

$$-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad \text{Ответ: } -\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

2) $\operatorname{tg}^2 x \geq 3$. Решение: данное неравенство равносильно совокупности не-

равенств $\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3} \end{cases}$. По графику функции $y = \operatorname{tg} x$, находим решения

$$\frac{\pi}{3} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{или} \quad -\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leq -\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{3} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad -\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leq -\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

§43. Обратные тригонометрические функции

$$y = \arcsin x$$

1°. Область определения $-[-1; 1]$.

2°. Множество значений $-\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3°. Функция $y = \arcsin x$ возрастает.

4°. Функция $y = \arcsin x$ нечетная.

$$y = \arccos x$$

1°. Область определения $-[-1; 1]$.

2°. Множество значений $-[0; \pi]$.

3°. Функция $y = \arccos x$ убывает.

$$y = \operatorname{arctg} x$$

1°. Область определения – \mathbf{R} .

2°. Множество значений – $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3°. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает.

4°. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ нечетная.

750. 1) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arcsin \frac{2}{\sqrt{10}}$. Решение: т.к. функция $y = \arcsin x$ возрастает и

$\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{\sqrt{10}}$, поэтому $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} < \arcsin \frac{2}{\sqrt{10}}$.

2) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$. Решение: т.к. функция $y = \arcsin x$ возрастает и

$-\frac{2}{3} > -\frac{3}{4}$, поэтому $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) > \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$.

751. 1) $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$. Решение: т.к. функция $y = \arccos x$ убывает и

$\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{5}}$, поэтому $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}} < \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$.

2) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. Решение: т.к. функция $y = \arccos x$ убывает и

$-\frac{4}{5} < -\frac{1}{3}$, поэтому $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) > \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

752. 1) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg} 3\sqrt{2}$. Решение: т.к. функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает и $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$, поэтому $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3} < \operatorname{arctg} 3\sqrt{2}$.

2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Решение: т.к. функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает и

$-\frac{1}{\sqrt{2}} < -\frac{1}{\sqrt{5}}$, поэтому $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

753. 1) $\arcsin(2-3x) = \frac{\pi}{6}$. Решение: т.к. $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то по определению:

$2-3x = \sin \frac{\pi}{6}$, $2-3x = 0,5$, $3x = 1,5$, откуда $x = 0,5$. Ответ: $x = 0,5$.

2) $\arcsin(3-2x) = \frac{\pi}{4}$. Решение: т.к. $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то по определению:

$$3-2x = \sin \frac{\pi}{4}, \quad 3-2x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{откуда } x = \frac{6-\sqrt{2}}{4}. \quad \text{Ответ: } x = \frac{6-\sqrt{2}}{4}.$$

3) $\arcsin \frac{(x-2)}{4} = -\frac{\pi}{4}$. Решение: т.к. $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то по определению:

$$\frac{x-2}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad x-2 = -4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{откуда } x = 2-2\sqrt{2}. \quad \text{Ответ: } x = 2-2\sqrt{2}.$$

4) $\arcsin \frac{x+3}{2} = -\frac{\pi}{3}$. Решение: т.к. $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то по определению:

$$\frac{x+3}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), \quad x+3 = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{откуда } x = -\sqrt{3}-3. \quad \text{Ответ: } x = -\sqrt{3}-3.$$

754. 1), 2), 4) Аналогично 3).

3) $\arccos \frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Решение: т.к. $\frac{2\pi}{3} \in [0; \pi]$, то по определению арко-

синуса $\frac{x+1}{3} = \cos \frac{2\pi}{3}$, $\frac{x+1}{3} = -0,5$, $x = -2,5$. Ответ: $x = -2,5$.

755. 1) $\operatorname{arctg} \frac{1-x}{4} = \frac{\pi}{3}$. Решение: так как $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то по определению

$$\frac{1-x}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}, \quad \frac{1-x}{4} = \sqrt{3}, \quad 1-x = 4\sqrt{3}, \quad \text{т.е. } x = 1-4\sqrt{3}. \quad \text{Ответ: } x = 1-4\sqrt{3}.$$

2)–4) Аналогично 1).

756. 1) $y = \arcsin \frac{x-3}{2}$. Решение: по определению арксинуса необходимо,

чтобы $-1 \leq \frac{x-3}{2} \leq 1$, откуда $-2 \leq x-3 \leq 2$, $1 \leq x \leq 5$. Ответ: $1 \leq x \leq 5$.

2) $y = \arccos(2-3x)$. Решение: по определению арккосинуса необходимо,

чтобы $-1 \leq 2-3x \leq 1$, откуда $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$. Ответ: $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

3) $y = \arccos(2\sqrt{x}-3)$. Решение: по определению арксинуса необходимо,

чтобы $-1 \leq 2\sqrt{x}-3 \leq 1$, кроме того, по определению квадратного корня $x \geq 0$. Тогда $2 \leq 2\sqrt{x} \leq 4$, $1 \leq \sqrt{x} \leq 2$, откуда $1 \leq x \leq 4$. Ответ: $1 \leq x \leq 4$.

4) $y = \arcsin \frac{2x^2-5}{3}$. Решение: по определению арксинуса необходимо,

чтобы $-1 \leq \frac{2x^2 - 5}{3} \leq 1$, откуда $-3 \leq 2x^2 - 5 \leq 3$, $2 \leq 2x^2 \leq 8$, $1 \leq x^2 \leq 4$,
откуда $1 \leq x \leq 2$ или $-2 \leq x \leq -1$. Ответ: $1 \leq x \leq 2$, $-2 \leq x \leq -1$.

757. Решение: необходимо показать, что точка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ является серединой отрезка между точками $(x; y(x))$ и $(-x; y(-x))$. Таким образом, нам нужно доказать тождество $\frac{\pi}{2} = \frac{y(x) + y(-x)}{2}$, $\pi = \arccos x + \arccos(-x)$. Отсюда следует, что $\pi - \arccos x = \arccos(-x)$, а это истинное тождество.

Упражнения к главе VII

758. 1) Указание: область определения – \mathbf{R} .

2) Указание: область определения совпадает с областью определения тангенса.

3) Указание: необходимо $\sin x \geq 0$.

4) Указание: необходимо $\cos x \geq 0$.

5) $y = \frac{2x}{2 \sin x - 1}$. Решение: необходимо $2 \sin x - 1 \neq 0$, т.е. $\sin x \neq \frac{1}{2}$, откуда $x \neq (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x \neq (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

6) Указание: необходимо $2 \sin^2 x - \sin x \neq 0$, откуда $\sin x \neq 0$ и $\sin x \neq \frac{1}{2}$. Аналогично 5).

759. 1) Указание: $1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$.

2) Указание: $2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$.

3) Указание: $3 - 2 \sin^2 x = 2 + \cos 2x$.

4) Указание: $2 \cos^2 x + 5 = \cos 2x - 6$.

5) Указание: $\cos 3x \sin x - \sin 3x \cos x + 4 = \sin(-2x) + 4 = 4 - \sin 2x$.

6) Указание: $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x - 3 = \cos x - 3$.

760. 1) $y = x^2 + \cos x$. Решение: $y(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = y(x)$, т.е. функция четная.

2) $y = x^3 - \sin x$. Решение: $y(-x) = (-x)^3 - \sin(-x) = -(x^3 - \sin x) = -y(x)$, т.е. функция нечетная.

3) $y = (1 - x^2) \cos x$. Решение: $y(-x) = (1 - (-x)^2) \cos(-x) = (1 - x^2) \cos x = y(x)$,

т.е. функция четная.

4) $y = (1 + \sin x) \sin x$. Решение: $y(-x) = (1 + \sin(-x)) \sin(-x) = -(1 - \sin x) \sin x$, т.е. функция общего вида.

761. 1) $y = \cos 7x$. Решение: пусть T – период, тогда $\cos 7x = \cos 7(x+T)$, подставим в это тождество $x=0$. Тогда $1 = \cos 0 = \cos 7T$, откуда $7T = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Т.к. наименьшее положительное k равно 1, то наименьший положительный период равен $\frac{2\pi}{7}$. Ответ: $\frac{2\pi}{7}$.

2) $y = \sin \frac{x}{7}$. Решение: пусть T – период, тогда $\sin \frac{x}{7} = \sin \frac{(x+T)}{7}$, подставим в это тождество $x = \frac{7\pi}{2}$. Тогда $1 = \sin \frac{\pi}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{T}{7} \right)$, откуда $\frac{T}{7} = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Т.к. наименьшее положительное k равно 1, то наименьший положительный период равен 14π . Ответ: 14π .

762. Аналогично задачам 712 и 724.

763. Указание: решите задачу графически, преобразовав неравенства к виду:

$$1) \cos x \geq -\frac{1}{2}; 2) \sin x > \frac{1}{2}; 3) \operatorname{tg} x > -2; 4) \operatorname{tg} x \geq \frac{1}{2}.$$

764. 1) См. рис. 95.

2) См. рис. 96.

765. 1) Указание: $2x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$. Решение: О.О. состоит из тех точек, где тангенс существует и положительный. Таким образом, область определения – это решения неравенства $\operatorname{tg} x \geq 0$, откуда $\pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k$. Ответ: $\pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

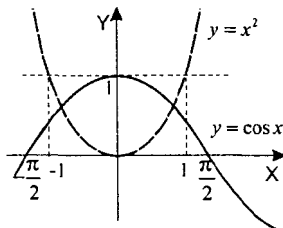


Рис. 95

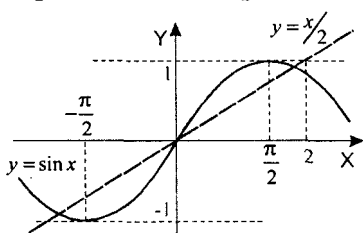


Рис. 96

766. 1) Указание: $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) =$
 $= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$

2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Решение: по формуле произведения синусов

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 2x\right) = -\frac{1}{2}\cos 2x. \text{ Т.к. минимальное}$$

значение $\cos 2x$ равно -1 , а максимальное 1 , то максимальное значение

функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ равно $0,5$, а минимальное $-0,5$.

Ответ: $0,5$ и $-0,5$.

767. 1) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$. Решение: $y(-x) = \sin(-x) + \operatorname{tg}(-x) = -(\sin x + \operatorname{tg} x) = -y(x)$, т.е. функция нечетная.

2) $y = \sin x \operatorname{tg} x$. Решение: $y(-x) = \sin(-x) \cdot \operatorname{tg}(-x) = \sin x \operatorname{tg} x = y(x)$, т.е. функция четная.

3) $y = \sin x |\cos x|$. Решение: $\sin(-x) |\cos(-x)| = -\sin x |\cos x| = -(y(x))$, т.е. функция нечетная.

768. 1) $y = 2\sin(2x+1)$. Решение: пусть T – период, тогда $\sin(2x+1) = \sin(2(x+T)+1)$, $\sin(2x+1) - \sin(2(x+T)+1) = 0$, откуда по формуле разности синусов $-2\sin 2T \cos(2x+1+T) = 0$. Поскольку это равенство должно выполняться при всех x , то необходимо, чтобы $\sin 2T = 0$, откуда $2T = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. При $k = 1$ $T = \frac{\pi}{2}$ не является периодом, а при $k = 2$ $T = \pi$ есть наименьший положительный период. Ответ: $T = \pi$.

2) $y = 3\operatorname{tg}\frac{1}{4}(x+1)$. Решение: пусть T – период, тогда $\operatorname{tg}\frac{1}{4}(x+1) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4} + \frac{T}{4}\right)$. Поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ π -периодична, то $\frac{T}{4} = \pi k$,

откуда $T = 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. При $k = 1$ $T = 4\pi$ – это и есть наименьший положительный период. Ответ: $T = 4\pi$.

769. 1) См. рис. 97;

2) См. рис. 98.

770. 1) Указание: решите уравнение $\cos^2 x - \cos x = 0$. Аналогично 2).

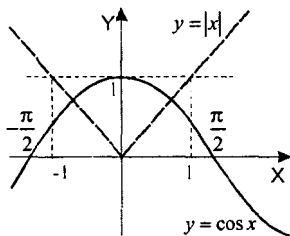


Рис. 97

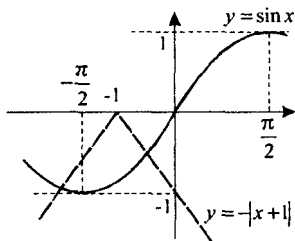


Рис. 98

2) $y = \cos x - \cos 2x - \sin 3x$. Решение: необходимо решить уравнение $\cos x - \cos 2x - \sin 3x = 0$. Преобразуем это уравнение:

$$\cos x - \cos 2x - \sin 3x = -2 \sin\left(-\frac{x}{2}\right) \sin \frac{3x}{2} - 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{3x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) = 2 \sin \frac{3x}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) - \cos \frac{3x}{2} \right) =$$

$$= 2 \sin \frac{3x}{2} \left(-2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right) = 4 \sin \frac{3x}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right), \text{ то}$$

есть $\sin \frac{3x}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 0$. Откуда $\frac{3x}{2} = \pi k$ или $x - \frac{\pi}{4} = \pi k$, или

$$\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} = \pi k, k \in \mathbf{Z}. \text{ Из первого уравнения } x = \frac{2\pi k}{3}, \text{ из второго } x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

и из третьего $x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{2\pi k}{3}, x = \frac{\pi}{4} + \pi k,$

$$x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

771. Указание: решите неравенство $\frac{3}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} > 0$.

772. Указание: решите неравенство $\operatorname{tg} 2x - 1 < 0$.

773. 1) $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 2$. Решение: построим график $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$. Ис-

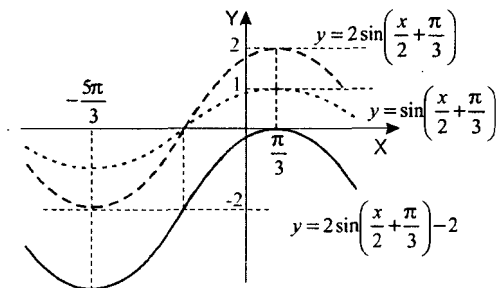


Рис. 99

ходный график получится из него растяжением в два раза вдоль оси OY и сдвигом на две единицы вниз. См. рис. 99.

2) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$. Решение:

$$\cos x - \sqrt{\cos^2 x} = \cos x - |\cos x| = \begin{cases} 0, & \text{если } \cos x \geq 0 \\ 2\cos x, & \text{если } \cos x < 0 \end{cases}, \quad y = \begin{cases} 0, & \text{если } \cos x \geq 0 \\ 2\cos x, & \text{если } \cos x < 0 \end{cases}$$

График изображен на рисунке 100.

774. 1) Указание: $12 \sin x - 5 \cos x = 13 \sin(x - \varphi)$, где $\cos \varphi = \frac{12}{13}$ и $\sin \varphi = \frac{5}{13}$.

См. задачу 697.

2) $y = \cos^2 x - \sin x$. Решение: преобразуем выражение,

$y = 1 - \sin^2 x - \sin x$ и сделаем замену переменной $t = \sin x$, $-1 \leq t \leq 1$. Тогда

$y = -t^2 - t + 1$ – квадратный трехчлен. Его максимум достигается в точ-

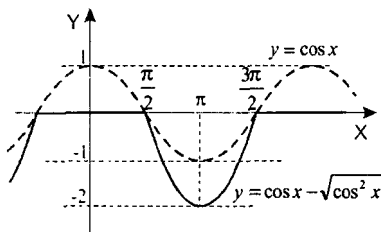


Рис. 100

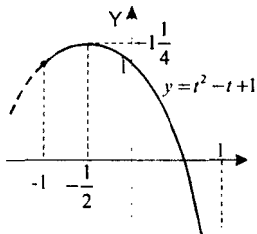


Рис. 101

где $t_0 = -\frac{1}{2}$ и равен $1\frac{1}{4}$. Его минимум достигается на одном из концов промежутка $[-1; 1]$, т.к. $y(-1) = 1$, а $y(1) = -1$, то минимальное значение равно -1 (см. рис. 101). Ответ: $1\frac{1}{4}$ и -1 .

775. 1) $\sin x \geq \cos x$. Решение: перенесем все в левую часть и преобразуем,

получим $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$. Таким образом

$$2\pi k \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2\pi k, \quad 2\pi k + \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $2\pi k + \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: преобразуйте неравенство к виду $\frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x} > 0$, тогда

необходимо, чтобы выполнялось условие:
$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases}$$

Оглавление

Глава I. Действительные числа

§1. Целые и рациональные числа	3
§2. Действительные числа	4
§3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	6
§4. Арифметический корень натуральной степени	10
§5. Степень с рациональным и действительным показателями	16
Упражнения к главе I	23

Глава II. Степенная функция

§6. Степенная функция, ее свойства и график	29
§7. Взаимно обратные функции	32
§8. Равносильные уравнения и неравенства	35
§9. Иррациональные уравнения	37
§10. Иррациональные неравенства	41
Упражнения к главе II	44

Глава III. Показательная функция

§11. Показательная функция, ее свойства и график	49
§12. Показательные уравнения	51
§13. Показательные неравенства	57
§14. Системы показательных уравнений и неравенств	60
Упражнения к главе III	61

Глава IV. Логарифмическая функция

§15. Логарифмы	65
§16. Свойства логарифмов	70
§17. Десятичные и натуральные логарифмы	72
§18. Логарифмическая функция, ее свойства и график	74
§19. Логарифмические уравнения	77
§20. Логарифмические неравенства	81
Упражнения к главе IV	85

Глава V. Тригонометрические формулы

§21. Радианная мера угла	97
§22. Поворот точки вокруг начала координат	98
§23. Определение синуса, косинуса и тангенса угла	101
§24. Знаки синуса, косинуса и тангенса	104
§25. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом	106
§26. Тригонометрические тождества	107
§27. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$	110
§28. Формулы сложения	112
§29. Синус, косинус и тангенс двойного угла	116
§30. Синус, косинус и тангенс половинного угла	120
§31. Формулы приведения	124
§32. Сумма и разность синусов и косинусов	129
Упражнения к главе V	132

Глава VI. Тригонометрические уравнения

§33. Уравнение $\cos x = a$	137
§34. Уравнение $\sin x = a$	142

§35. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$	149
§36. Решение тригонометрических уравнений	153
§37. Примеры решения тригонометрических неравенств	162
Упражнения к главе VI	164
Глава VII. Тригонометрические функции	
§38. Область определения и множество значений	175
§39. Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций	178
§40. Свойства функции $y = \cos x$ и ее график	181
§41. Свойства функции $y = \sin x$ и ее график	185
§42. Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее график	187
§43. Обратные тригонометрические функции	191
Упражнения к главе VII	194
Глава VIII. Производная и ее геометрический смысл	
§44. Производная	200
§45. Производная степенной функции	201
§46. Правила дифференцирования	204
§47. Производная некоторых элементарных функций	211
§48. Геометрический смысл производной	218
Упражнения к главе VIII	224
Глава IX. Применение производной к исследованию функций	
§49. Возрастание и убывание функции	231
§50. Экстремумы функции	234
§51. Применение производной к построению графиков функций	239
§52. Наибольшее и наименьшее значения функции	245
§53. Выпуклость графика функции, точки перегиба	247
Упражнения к главе IX	248
Глава X. Интеграл	
§54. Первообразная	254
§55. Правила нахождения первообразных	255
§56. Площадь криволинейной трапеции и интеграл	259
§57. Вычисление интегралов	261
§58. Вычисление площадей с помощью интегралов	264
§59. Применение производной и интеграла к решению задач	368
Упражнения к главе X	269
Упражнения для итогового повторения	
1. Числа и алгебраические преобразования	275
2. Уравнения	291
3. Неравенства	305
4. Системы уравнений и неравенств	309
5. Текстовые задачи	314
6. Функции и графики	316
7. Производная и интеграл	325
8. Задания, предлагавшиеся на выпускных экзаменах	327
Задачи для внеклассной работы	334

Учебно-методическое издание

Сам себе репетитор®

Щеглова Александра Павловна

**ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ
ИЗ УЧЕБНИКА
ПО АЛГЕБРЕ
И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА**

**Ш.А. Алимova, Ю.Н. Колягина
(М.: Просвещение)**

10–11 классы

Дизайн обложки Екатерины Бедриной

Налоговая льгота – ОКП 005-93-953 (Литература учебная).
Издательство «ВАКО»

Подписано к печати с диапозитивов 28.02.2007.
Формат 70*100/32. Печать офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 14,3.
Тираж 15 000 экз. Заказ № 18678.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Саратовский полиграфический комбинат»
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59
www.sarpk.ru