

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

ОТВЕТЫ и РЕШЕНИЯ

10-11

К заданиям учебника
Ш. А. Алимова, Ю. М. Колягина и др.

Алгебра
и начала анализа

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

А.П. Щеглова

**ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР
ЗАДАНИЙ ИЗ УЧЕБНИКА
ПО АЛГЕБРЕ
И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА**

авторов

**Ш.А. Алимова,
Ю.М. Колягина,
под научным руководством
А.Н. Тихонова
(М.: Просвещение)**

10–11 классы

Москва • «ВАКО» • 2007

УДК 337:167.1:[512+517]

ББК 22.1я721

Щ33

Щеглова А.П.

Щ33 Подробный разбор заданий из учебника по алгебре и началам анализа для 10–11 классов Ш.А. Алимова, Ю.Н. Колягина. – М.: ВАКО, 2007. – 352 с. – (Сам себе репетитор).

ISBN 978-5-94665-528-6

Пособие содержит подробный разбор заданий из учебника по алгебре и началам анализа для 10–11 классов **Ш.А. Алимова, Ю.Н. Колягина (М.: Просвещение)**. Приводятся основные сведения по каждому разделу, алгоритмы решения типовых задач, ключи, ответы и подробный разбор заданий.

Автор – практикующий педагог с большим стажем подготовки абитуриентов к экзаменам.

УДК 337:167.1:[512+517]

ББК 22.1я721

ISBN 978-5-94665-528-6

© ООО «ВАКО», 2007

Глава VIII

Производная и ее геометрический смысл

§44. Производная

Основные понятия:

Производной функции $f(x)$ в точке x называется

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Производная линейной функции $(kx + b) = k$.

776. Указание: средняя скорость равна $v_{\text{ср}} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$. См. задачу 777.

777. Найти среднюю скорость движения точки на отрезке $[1; 1,2]$, если закон ее движения $s = s(t)$ задан формулой:

1) $s(t) = 2t$. Решение: $v_{\text{ср}} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2 \cdot 1,2 - 2 \cdot 1}{1,2 - 1} = 2$. Ответ: 2.

2) $s(t) = t^2$. Решение: $v_{\text{ср}} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1,2^2 - 1^2}{1,2 - 1} = 2,2$. Ответ: 2,2.

778. Найти мгновенную скорость движения точки, если:

1) $s(t) = 2t + 1$. Решение: мгновенная скорость $v(t) = s'(t) = (2t + 1)' = 2$.

Ответ: 2.

2) Аналогично 1).

779. Аналогично задачам 777, 778.

780. 1), 2) См. задачу 5 §44.

3) $f(x) = 3x^2 - 5x$. Решение: по определению $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) - 3x^2 + 5x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x - 5 + 3h) = 6x - 5$

Т.е. $f'(x) = 6x - 5$. Ответ: $6x - 5$.

4) Аналогично 3).

781. Указание: 1) $k = 4$; 2) $k = -7$; 3) $k = -5$.

782. Найти мгновенную скорость движения точки, если закон ее движения $s(t)$ задан формулой:

$$1) s(t) = \frac{3}{2}t^2. \text{ Решение: } v(t) = s'(t). \quad s(t+h) - s(t) = \frac{3}{2}(t+h)^2 - \frac{3}{2}t^2 = 3th + \frac{3}{2}h^2.$$

$$\text{Тогда} \quad s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3th + \frac{3}{2}h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(3t + \frac{3}{2}h \right) = 3t, \quad \text{т.е.}$$

$$v(t) = 3t. \text{ Ответ: } v(t) = 3t.$$

2) Аналогично 1).

783. Указание: $v(t) = s'(t) = 2t$ (аналогично задаче 782). Тогда $v(5) = 10$, $v(10) = 20$.

$$784. \text{ Указание: } v_{1, \text{ср}} = \frac{1,5 - 0}{1} = 1,5, \quad v_{2, \text{ср}} = \frac{2,5 - 1,5}{2 - 1} = 1, \quad v_{3, \text{ср}} = \frac{3 - 2,5}{3 - 2} = 0,5.$$

785. Аналогично задаче 784.

786. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 3$. Решение: необходимо проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что $|(2x+1) - 3| < \varepsilon$ для всех $x \neq 1$, так что $|x-1| < \delta$. Преобразуем: $|(2x+1) - 3| = 2|x-1|$. Т.е. для любого $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|(2x+1) - 3| = 2|x-1| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Равенство справедливо.

2) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$. Решение: необходимо проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что $|x^2 - 4| < \varepsilon$ для всех $x \neq 2$, так что $|x-2| < \delta$.

Преобразуем: $|x^2 - 4| = |x+2| \cdot |x-2|$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$

можно взять $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Тогда $|x^2 - 4| = |x+2| \cdot |x-2| < 3 \cdot \min\left(\frac{\varepsilon}{3}; \frac{1}{3}\right) \leq \varepsilon$.

Равенство справедливо.

§45. Производная степенной функции

$$\left((kx+b)^p \right)' = pk(kx+b)^{p-1}$$

787. 1) x^6 . Решение: по формуле, где $k = 1$, $b = 0$ и $p = 6$: $(x^6)' = 6x^5$. Ответ: $6x^5$

$$2) (x^7)' = 7x^6;$$

$$3) (x^{11})' = 11x^{10};$$

$$4) (x^{13})' = 13x^{12}.$$

788. 1) x^{-2} . Решение: по формуле, где $k = 1$, $b = 0$ и $p = -2$: $(x^{-2})' = -2x^{-3}$.

$$2) (x^{-3})' = -3x^{-4}; \quad 3) (x^{-4})' = -4x^{-5}; \quad 4) (x^{-7})' = -7x^{-8}.$$

789. 1) $x^{\frac{1}{2}}$. Решение: по формуле, где $k = 1$, $b = 0$ и $p = \frac{1}{2}$: $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

$$2) \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}; \quad 3) \left(x^{-\frac{2}{7}}\right)' = -\frac{2}{7}x^{-\frac{9}{7}}; \quad 4) (x^{\sqrt{3}})' = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}.$$

790. 1) $\left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' = -5x^{-6}$; 2) $\left(\frac{1}{x^9}\right)' = (x^{-9})' = -9x^{-10}$;

$$3) (\sqrt[4]{x})' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}; \quad 4) (\sqrt[3]{x^2})' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}};$$

$$5) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}; \quad 6) \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' = \left(x^{-\frac{3}{4}}\right)' = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}.$$

791. 1) $((4x-3)^2)' = 2 \cdot 4 \cdot (4x-3)^1 = 8(4x-3)$;

$$2) ((5x+2)^{-3})' = -3 \cdot 5 \cdot (5x+2)^{-4} = -15(5x+2)^{-4};$$

$$3) ((1-2x)^{-6})' = (-6) \cdot (-2) \cdot (1-2x)^{-7} = 12(1-2x)^{-7};$$

$$4) ((2-5x)^4)' = -5 \cdot 4 \cdot (2-5x)^3 = -20(2-5x)^3;$$

$$5) ((2x)^3)' = 2 \cdot 3 \cdot (2x)^2 = 24x^2;$$

$$6) ((-5x)^4)' = -5 \cdot 4 \cdot (-5x)^3 = 2500x^3.$$

792. 1) $(\sqrt{2x+7})' = \left((2x+7)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2x+7)^{-\frac{1}{2}}$;

$$2) (\sqrt[3]{7-3x})' = \left((-3x+7)^{\frac{1}{3}}\right)' = -3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3x+7)^{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{4}(7-3x)^{-\frac{2}{3}};$$

$$3) (\sqrt[4]{3x})' = \left((3x)^{\frac{1}{4}}\right)' = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot (3x)^{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{4}(x)^{-\frac{3}{4}};$$

$$4) (\sqrt[3]{5x})' = \left((5x)^{\frac{1}{3}}\right)' = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot (5x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{3}(x)^{-\frac{2}{3}}.$$

793. 1) $f(x) = x^6$, $x_0 = 0,5$. Решение: $f'(x) = (x^6)' = 6x^5 = 6 \cdot (0,5)^5 = 0,375$.

Ответ: 0,375

$$2) f'(x) = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -2 \cdot 3^{-3} = -\frac{2}{27};$$

$$3) f'(x) = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4};$$

$$4) f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot 2^{-2} = \frac{1}{12};$$

$$5) f'(x) = (\sqrt{5-4x})' = \left((5-4x)^{\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{4}{2}(5-4x)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{4}{2}1^{-\frac{1}{2}} = -2;$$

$$6) f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\right)' = \left((3x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot 3(3x+1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{16}.$$

794. Указание: $y' = 4x^3$, см. рис. 102.

795. Указание: $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$ (что соответствует рисунку) и $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$796. 1) \left(\frac{1}{(2+3x)^2}\right)' = \left((2+3x)^{-2}\right)' = -6(2+3x)^{-3};$$

$$2) \left(\frac{1}{(3-2x)^3}\right)' = \left((3-2x)^{-3}\right)' = 6(3-2x)^{-4};$$

$$3) \left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)' = \left((3x-2)^{\frac{2}{3}}\right)' = 2(3x-2)^{-\frac{1}{3}};$$

$$4) \left(\sqrt[7]{(3-14x)^2}\right)' = \left((3-14x)^{\frac{2}{7}}\right)' = -4(3-14x)^{-\frac{5}{7}};$$

$$5) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x-7}}\right)' = \left((3x-7)^{-\frac{1}{3}}\right)' = -(3x-7)^{-\frac{4}{3}};$$

$$6) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}\right)' = \left((1-2x)^{-\frac{2}{3}}\right)' = \frac{4}{3}(1-2x)^{-\frac{5}{3}}.$$

797. 1) Указание: $f'(x) = 3x^2$, аналогично 2).

$$2) f(x) = \sqrt[3]{x^2}. \text{ Решение: } f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}. \text{ Т.е.}$$

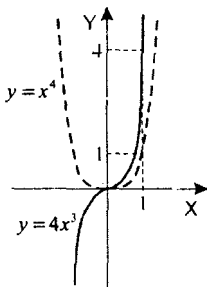


Рис. 102

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 1, \text{ откуда } \sqrt[3]{x} = \frac{2}{3}, x = \frac{8}{27}. \text{ Ответ: } x = \frac{8}{27}.$$

798. Указание: мгновенная скорость равна $s'(3)$. Аналогично задаче 793.

799. При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = f(x)$, если:

1) $f(x) = (2x - 1)^2$. Решение: $f'(x) = 2 \cdot 2 \cdot (2x - 1) = 4 \cdot (2x - 1)$. Таким образом $4(2x - 1) = (2x - 1)^2$, откуда $2x - 1 = 0$ или $2x - 1 = 4$, $x = 0,5$ или $x = 2,5$.

Ответ: $x = 0,5$, $x = 2,5$.

2) Указание: $f'(x) = 3 \cdot 3(3x + 2)^2$, аналогично 1).

800. 1) Указание: $f(x) = x^2 + 1$, $f'(x) = 2x$ (см. задачу 780).

2) Указание: $f(x) = 1 - x^2$, $f'(x) = -2x$ (см. задачу 780).

801. Указание: решите уравнение $f'(x) = f(x)$, т.е. $\frac{3}{2\sqrt{3x-7}} = \sqrt{3x-7}$.

§46. Правила дифференцирования

$$1^\circ. (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x);$$

$$2^\circ. (cf(x))' = cf'(x) \text{ для любой постоянной } c \in \mathbf{R};$$

$$3^\circ. (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$4^\circ. \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$5^\circ. f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

802. 1) $x^2 + x$. Решение: по свойству 1° $(x^2 + x)' = (x^2)' + x' = 2x + 1$. Ответ: $2x + 1$

$$2) (x^2 - x)' = (x^2)' + (-x)' = 2x - 1;$$

$$3) (3x^2)' = 3 \cdot 2 \cdot x = 6x; \quad 4) (-17x^2)' = -17 \cdot 2 \cdot x = -34x;$$

$$5) (-4x^3)' = -4 \cdot 3 \cdot x^2 = -12x^2; \quad 6) (0,5x^3)' = 0,5 \cdot 3x^2 = 1,5x^2;$$

$$7) (13x^2 + 26)' = 13(x^2)' + 26(x^0)' = 13 \cdot 2x + 26 \cdot 0 = 26x;$$

$$8) (8x^2 - 16)' = (8x^2)' - (16)' = 16x - 0 = 16x.$$

$$803. 1) (3x^2 - 5x + 5)' = (3x^2)' + (-5x)' + 5' = 6x - 5;$$

$$2) (5x^2 + 6x - 7)' = (5x^2)' + (6x)' - 7' = 10x + 6;$$

$$3) (x^4 + 2x^2)' = (x^4)' + (2x^2)' = 4x^3 + 4x;$$

$$4) (x^5 - 3x^2)' = (x^5)' + (-3x^2)' = 5x^4 - 6x;$$

$$5) (x^3 + 5x)' = (x^3)' + (5x)' = 3x^2 + 5;$$

$$6) (-2x^3 + 18x)' = (-2x^3)' + (18x)' = -6x^2 + 18;$$

$$7) (2x^3 - 3x^2 + 6x + 1)' = (2x^3)' + (-3x^2)' + (6x)' + 1' = 6x^2 - 6x + 6;$$

$$8) (-3x^3 + 2x^2 - x - 5)' = (-3x^3)' + (2x^2)' + (-x)' + (-5)' = -9x^2 + 4x - 1.$$

804. Указание: $(3(x-2)^2 + 1)' = 3 \cdot 2(x-2)$, см. рис. 103.

$$805. 1) \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)' = (x^2)' + (x^{-3})' = 2x - 3x^{-4};$$

$$2) \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)' = (x^3)' + (x^{-2})' = 3x^2 - 2x^{-3};$$

$$3) (2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x})' = \left(2x^{\frac{1}{4}}\right)' - \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}};$$

$$4) (3\sqrt[6]{x} + 7\sqrt[4]{x})' = \left(3x^{\frac{1}{6}}\right)' + \left(7x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{5}{6}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{13}{4}}.$$

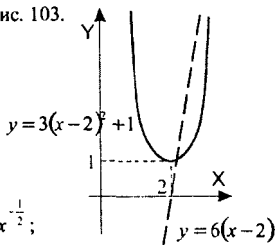


Рис. 103

$$806. 1) f'(x) = (x^2 - 2x + 1)' = 2x - 2. \text{ Тогда } f'(0) = -2, \text{ а } f'(2) = 2.$$

$$2) f'(x) = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2. \text{ Тогда } f'(0) = -2, \text{ а } f'(2) = 10.$$

$$3) f'(x) = (-x^3 + x^2)' = -3x^2 + 2x. \text{ Тогда } f'(0) = 0, \text{ а } f'(2) = -8.$$

$$4) f'(x) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1. \text{ Тогда } f'(0) = 1, \text{ а } f'(2) = 5.$$

$$807. 1) f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-1})' + (x^{-2})' = -x^{-2} - 2x^{-3}. f'(3) = -\frac{5}{27}, f'(1) = -3.$$

$$2) f'(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + (x^{-1})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2}. f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{9},$$

$$f'(1) = -\frac{1}{2}.$$

$$3) f'(x) = \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3} \right)' = 3 \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' - 2(x^{-3})' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 6x^{-4}, \quad f'(3) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{2}{27},$$

$$f'(1) = 4,5.$$

$$4) f'(x) = \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} \right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}, \quad f'(3) = \frac{14}{3\sqrt{3}}, \quad f'(1) = 3.$$

808. 1) $y = \frac{2}{x-1}, x_0 = 1$. Решение: $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$. Т.к. значение y' в точке $x =$

1 не определено, то функция в этой точке не дифференцируема.

$$2) y = \frac{3x-5}{(x-3)^2}, x_0 = 3. \text{ Решение: } y' = \frac{(3x-5)'(x-3)^2 - 2(3x-5)(x-3)'}{(x-3)^4}.$$

Т.к. значение y' в точке $x = 3$ не определено, то функция в этой точке не дифференцируема.

$$3) y = \sqrt{x+1}, x = 0. \text{ Решение: } y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}. \text{ Т.к. значение } y' \text{ в точке } x = 0$$

определено, следовательно, функция в этой точке дифференцируема.

$$4) y = \sqrt{5-x}, x = 4. \text{ Решение: } y' = -\frac{1}{2\sqrt{5-x}}. \text{ Т.к. значение } y' \text{ в точке } x =$$

4 определено, следовательно, функция в этой точке дифференцируема.

809. 1) $f'(x) = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2 = 0$. Тогда $x^2 = \frac{2}{3}$, откуда $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$$2) f'(x) = (-x^2 + 3x + 1)' = -2x + 3 = 0. \text{ Тогда } 2x = 3, \text{ откуда } x = \frac{3}{2}.$$

$$3) f'(x) = (2x^3 + 3x^2 - 12x - 3)' = 6x^2 + 6x - 12 = 0. \text{ Тогда } x^2 + x - 2 = 0,$$

откуда $x_1 = 1, x_2 = -2$.

$$4) f'(x) = (x^3 + 2x^2 - 7x + 1)' = 3x^2 + 4x - 7 = 0. \text{ Тогда } (x-1)(3x-7) = 0,$$

откуда $x_1 = 1, x_2 = -\frac{7}{3}$.

$$5) f'(x) = (3x^4 - 4x^3 - 12x^2)' = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0. \text{ Тогда } 12x(x^2 - x - 2) = 0;$$

$$12x(x-2)(x+1) = 0, \text{ откуда } x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2.$$

$$6) f'(x) = (x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 5)' = 4x^3 + 12x^2 - 16x = 0. \text{ Тогда } 4x(x+4)(x-1) = 0,$$

откуда $x_1 = -4, x_2 = 0, x_3 = 1$.

$$\begin{aligned} 810. 1) \left((x^2 - x)(x^3 + x) \right)' &= (x^2 - x)'(x^3 + x) + (x^2 - x)(x^3 + x)' = \\ &= (2x - 1)(x^3 + x) + (x^2 - x)(3x^2 + 1) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x. \end{aligned}$$

$$2) \left((x+2)\sqrt{x} \right)' = (x+2)' \sqrt{x} + (x+2) \left(x^{1/2} \right)' = \sqrt{x} + \frac{1}{3}(x+2)x^{-2/3} = \frac{4x+2}{3\sqrt{x^2}}.$$

$$3) \left((x-1)\sqrt{x} \right)' = (x-1)' \cdot \sqrt{x} + (x-1) \left(\sqrt{x} \right)' = \sqrt{x} + \frac{(x-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\begin{aligned} 811. 1) f'(x) &= \left((x-1)^8(2-x)^7 \right)' = \left((x-1)^8 \right)'(2-x)^7 + \left((2-x)^7 \right)'(x-1)^8 = \\ &= 8(x-1)^7(2-x)^7 + 7 \cdot (-1)(2-x)^6(x-1)^8 = 8(x-1)^7(2-x)^7 - 7(2-x)^6(x-1)^8, \\ &\text{откуда } f'(1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) f'(x) &= \left((2x-1)^5(1+x)^4 \right)' = \left((2x-1)^5 \right)'(1+x)^4 + (2x-1)^5 \left((1+x)^4 \right)' = \\ &= 10(2x-1)^4(1+x)^4 + 4(2x-1)^5(1+x)^3, \text{ откуда } f'(1) = 160 + 32 = 192. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) f'(x) &= \left(\sqrt{2-x}(3-2x)^8 \right)' = \left((2-x)^{1/2} \right)'(3-2x)^8 + \sqrt{2-x} \left((3-2x)^8 \right)' = \\ &= -\frac{(3-2x)^8}{2\sqrt{2-x}} - 16\sqrt{2-x}(3-2x)^7. \text{ Тогда } f'(1) = -\frac{1}{2} - 16 = -16,5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) f'(x) &= \left((5x-4)^6 \sqrt{3x-2} \right)' = \left((5x-4)^6 \right)' \sqrt{3x-2} + (5x-4)^6 \left(\sqrt{3x-2} \right)' = \\ &= 30 \cdot (5x-4)^5 \sqrt{3x-2} + \frac{3(5x-4)^6}{2\sqrt{3x-2}}. \text{ Тогда } f'(1) = 31,5. \end{aligned}$$

812. Указание: выясните, имеет ли решение уравнение $3x^2 + 4x - 3 = 3x + 1$.

$$\begin{aligned} 813. \text{ Указание: по свойству } 3^x \left((x-3)^5(2+5x)^6 \right)' &= \\ &= 5(x-3)^4(2+5x)^6 + 30(x-3)^5(2+5x)^5 = (x-3)^4(2+5x)^5(10+25x+30x-90) = \\ &= (x-3)^4(2+5x)^5(55x-80). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 814. 1) \left(\frac{x^5 + x^3 + x}{x+1} \right)' &= \frac{(x^5 + x^3 + x)'(x+1) - (x^5 + x^3 + x)(x+1)'}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{(5x^4 + 3x^2 + 1)(x+1) - (x^5 + x^3 + x)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{4x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

$$2) \left(\frac{\sqrt{x+x^2+1}}{x-1} \right)' = \frac{(\sqrt{x+x^2+1})(x-1) - (\sqrt{x+x^2+1})'(x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x \right)(x-1) - (\sqrt{x+x^2+1}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} + x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

815. 1) $f'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)' = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$, отсюда $f'(1) = 1$.

2) $f'(x) = \left(\frac{2x^2}{1-7x} \right)' = \frac{4x(1-7x) + 14x^2}{(1-7x)^2} = 2 \frac{2x-7x^2}{(1-7x)^2}$, отсюда $f'(1) = -\frac{5}{18}$.

816. 1) $g(x) = 1-x$, $f(g) = g^{\frac{3}{2}}$. Решение: по определению $f(g(x)) = (g(x))^{\frac{3}{2}} = (1-x)^{\frac{3}{2}}$. Ответ: $(1-x)^{\frac{3}{2}}$.

2) $g(x) = \ln x$, $f(g) = \sqrt{g}$. Решение: по определению $f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{\ln x}$. Ответ: $\sqrt{\ln x}$.

817. 1) $F(x) = \sqrt{2x^2-7}$. Решение: рассмотрим функцию $f(g) = \sqrt{g}$, тогда $F(x) = f(2x^2-7)$, т.е. $g(x) = 2x^2-7$. Тогда $F(x) = f(g(x))$.

Ответ: $f(g) = \sqrt{g}$, $g(x) = 2x^2-7$.

2) $F(x) = \sin(x^2+1)$. Решение: рассмотрим функцию $f(g) = \sin g$, тогда $F(x) = f(x^2+1)$, т.е. $g(x) = x^2+1$. Тогда $F(x) = f(g(x))$.

Ответ: $f(g) = \sin g$, $g(x) = x^2+1$.

818. 1) $\left(\frac{x^3+x^2+16}{x} \right)' = (x^2+x+16x^{-1})' = 2x+1-\frac{16}{x^2}$.

2) $\left(\frac{x^3\sqrt{x}+3x+19}{\sqrt[3]{x}} \right)' = \left(x+3x^{\frac{2}{3}}+18x^{-\frac{1}{3}} \right)' = 1+2x^{-\frac{1}{3}}-6x^{-\frac{4}{3}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}+2x-6}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{x}}$.

819. 1) $\left(\frac{x^2-4}{\sqrt{x}} \right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}} \right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}+2x^{-\frac{3}{2}}$.

$$2) \left(\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) \left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) \right)' = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' - \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$820. 1) (2x-3)^3(3x^2+2x+1) = (2x-3)^3(3x^2+2x+1)' + ((2x-3)^3)'(3x^2+2x+1) = \\ = (2x-3)^4(2(2x-3)(3x+1)+10(3x^2+2x+1)) = 2(2x-3)^4(21x^2+3x+2).$$

$$2) (x-1)^4(x+1)^7 = (x-1)^4((x+1)^7)' + ((x-1)^4)'(x+1)^7 = \\ = 7(x-1)^4(x+1)^6 + 4(x-1)^3(x+1)^7 = (x^2-1)^3(x+1)^6(11x-3).$$

$$3) \sqrt[4]{3x+2}(3x-1)^4 = \left((3x+2)^{\frac{1}{4}} \right)' (3x-1)^4 + (3x+2)^{\frac{1}{4}} \left((3x-1)^4 \right)' = \\ = \frac{3}{4}(3x+2)^{-\frac{3}{4}}(3x-1)^4 + 12(3x+2)^{\frac{1}{4}}(3x-1)^3 = 3(3x-1)^3 \left(\frac{3x-1}{4\sqrt[4]{(3x+2)^3}} + 4\sqrt[4]{3x+2} \right)$$

4) Аналогично 3).

821. 1) Аналогично 2).

$$2) \left(\frac{3x^2+2x-1}{2x+1} \right)' = \frac{(6x+2)(2x+1) - 2(3x^2+2x-1)}{(2x+1)^2} = \frac{2(3x^2+3x+2)}{(2x+1)^2}.$$

$$3) \frac{2-x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2-x}. \text{ Решение: рассмотрим функции } f(g) = g + \frac{1}{g} \text{ и}$$

$$g(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x}}. \text{ Т.е. } f(g(x)) = \frac{2-x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2-x}. \text{ Тогда } \left(\frac{2-x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2-x} \right)' = f'(g(x))g'(x).$$

$$f'(g) = \left(g + \frac{1}{g} \right)' = 1 - \frac{1}{g^2}, \quad g'(x) = \left(\frac{2-x}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{-\sqrt{x} - (2-x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{x+2}{2x\sqrt{x}}.$$

$$\text{Окончательно } \left(\frac{2-x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2-x} \right)' = f'(g(x))g'(x) = \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{2-x}{\sqrt{x}} \right)^2} \right) \cdot \left(-\frac{x+2}{2x\sqrt{x}} \right) =$$

$$= \left(\frac{x}{(x-2)^2} - 1 \right) \cdot \frac{x+2}{2x\sqrt{x}}. \text{ Ответ: } \left(\frac{x}{(x-2)^2} - 1 \right) \cdot \frac{x+2}{2x\sqrt{x}}.$$

822. При каких значениях аргумента x значение производной функции

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \text{ равно } 0?$$

Решение: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$, т.е. $6x^2 - 6x - 12 = 0$, $x^2 - x - 2 = 0$, откуда $x = -1$ и $x = 2$. Ответ: $x = -1$, $x = 2$.

823. Указание: аналогично задаче 822. Решите уравнение

$$\frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = 3.$$

824. Указание: $f'(x) = (x-1)'(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2)(x-3)'$ =

$$= (x-2)(x-3) + (x-1)((x-2) + (x-3)) = 3x^2 - 12x + 11. \text{ Аналогично задаче 822}$$

825. Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает положительные значения:

1) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$. Решение: $f'(x) = 4x^3 - 8x$. Необходимо решить неравенство $4x^3 - 8x > 0$, $4x(x^2 - 2) > 0$, $4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) > 0$. Решая методом интервалов, находим $x > \sqrt{2}$ и $-\sqrt{2} < x < 0$. Ответ: $x > \sqrt{2}$, $-\sqrt{2} < x < 0$.

2) Указание: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$, аналогично 1).

3) $f(x) = (x+2)^2 \sqrt{x}$. Решение: область определения функции $x \geq 0$. Тогда

$$f'(x) = 2(x+2)\sqrt{x} + (x+2)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{(5x+2)(x+2)}{2\sqrt{x}}. \text{ Т.е. необходимо ре-}$$

шить неравенство $\frac{(5x+2)(x+2)}{2\sqrt{x}} > 0$, откуда (с учетом области определения неравенства) $x > 0$. Ответ: $x > 0$.

4) Указание: $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$, аналогично 3).

826. Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает отрицательные значения:

1) Указание: см. задачу 825. $y' = -12(5-3x)^3(3x-1)^3 + 9(5-3x)^4(3x-1)^2 = (5-3x)^3(3x-1)^2(-36x+12+45-27x) = (5-3x)^3(3x-1)^2(-63x+57)$.

2) Указание: см. задачу 825. $y' = 4(2x-3)(3-2x)^3 - 6(2x-3)^2(3-2x)^2 =$

$$= (2x-3)(3-2x)^2(12-8x-12x+18) = (2x-3)(3-2x)^2(30-20x).$$

$$3) y = \frac{3x^2-1}{1-2x}. \text{ Решение: } y' = \frac{6x(1-2x) - (-2)(3x^2-1)}{(1-2x)^2} = \frac{-6x^2+6x-2}{(1-2x)^2}.$$

$$\text{Т.е. необходимо решить неравенство } \frac{-6x^2+6x-2}{(1-2x)^2} < 0, \quad \frac{3x^2-3x+1}{(1-2x)^2} > 0.$$

Поскольку $3x^2-3x+1 > 0$ при всех x , то решением неравенства является вся его область определения, т.е. $x \neq 0,5$. Ответ: $x \neq 0,5$.

$$4) \text{ Указание: } y' = \frac{9x^2(1-3x) - (-3) \cdot 3x^3}{(1-3x)^2} = \frac{9x^2(1-2x)}{(1-3x)^2}, \text{ аналогично 3).}$$

827. Указание: угловая скорость $\omega(t) = \varphi'(t) = 0,2t - 0,5$.

828. Указание: мгновенная скорость тела равна $v(t) = s'(t) = -1 + 2t$. Тогда

$$\text{искомая энергия равна } \frac{mv^2(10)}{2}.$$

829. Указание: плотность $\rho(l) = m'(l) = 4l + 3$. 1) найдите $\rho(3)$, 2) найдите $\rho(25)$.

830. Найти производную функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ при $x < 2$ и при $x > 3$.

Решение: рассмотрим функцию $F(g) = \sqrt{g}$. Тогда $f(x) = F(x^2 - 5x + 6)$.

Т.е. если $g(x) = x^2 - 5x + 6$, то $f(x) = F(g(x))$. Тогда по свойству 5° имеем:

$$f'(x) = F'(g(x))g'(x). \quad F'(g) = \frac{1}{2\sqrt{g}}, \text{ поэтому } f'(x) = F'(g(x))g'(x) = \\ = \frac{1}{2\sqrt{x^2-5x+6}} \cdot (x^2-5x+6)' = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}. \text{ Ответ: } f'(x) = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}.$$

§47. Производные некоторых элементарных функций

$$(e^x)' = e^x; \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (\ln(kx+b))' = \frac{k}{kx+b}; \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

$$831. 1) (e^x + 1)' = (e^x)' + 1' = e^x; \quad 2) (e^x + x^2)' = (e^x)' + (x^2)' = e^x + 2x;$$

$$3) \left(e^{2x} + \frac{1}{x} \right)' = 2e^{2x} - \frac{1}{x^2}; \quad 4) (e^{-3x} + \sqrt{x})' = -3e^{-3x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$832. 1) (e^{2x+1} + 2x^3)' = (2x+1)' e^{2x+1} + 6x^2 = 2e^{2x+1} + 6x^2;$$

$$2) \left(e^{\frac{1}{2}x-1} - \sqrt{x-1} \right)' = \left(\frac{1}{2}x-1 \right)' e^{\frac{1}{2}x-1} - (x-1)' \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x-1} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}};$$

$$3) \left(e^{0,3x+2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = 0,3e^{0,3x+2} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}};$$

$$4) (e^{1-x} + x^{-3})' = -e^{1-x} - 3x^{-4};$$

$$5) (e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2xe^{x^2};$$

$$6) (e^{2x^3})' = (2x^3)' e^{2x^3} = 6x^2 e^{2x^3}.$$

$$833. 1) (2^x + e^x)' = 2^x \ln 2 + e^x; \quad 2) (3^x - x^{-2})' = 3^x \ln 3 + 2x^{-3};$$

$$3) (e^{2x} - x)' = 2e^{2x} - 1; \quad 4) (e^{3x} + 2x^2)' = 3e^{3x} + 4x;$$

$$5) (3^{x^2+2})' = 3^{x^2+2} \ln 3 \cdot (x^2 + 2)' = 2x \cdot 3^{x^2+2} \ln 3.$$

$$834. 1) (0,5^x + e^{3x})' = 0,5^x \ln 0,5 + 3e^{3x}; \quad 2) (3^x - e^{2x})' = 3^x \ln 3 - 2e^{2x};$$

$$3) (e^{-2x} + \sqrt[3]{x})' = -e^{-2x} + \frac{1}{3\sqrt{x^3}}; \quad 4) \left(e^{3-x} + \frac{1}{x^4} \right)' = -e^{3-x} - 4x^{-5}.$$

$$835. 1) (2 \ln x + 3^x)' = \frac{2}{x} + 3^x \ln 3; \quad 2) (3 \ln x - 2^x)' = \frac{3}{x} - 2^x \ln 2;$$

$$3) \left(\log_2 x + \frac{1}{2x} \right)' = \frac{1}{x \ln 2} - \frac{1}{2x^2}; \quad 4) (3x^{-3} - \log_3 x)' = -9x^{-4} - \frac{1}{x \ln 3};$$

$$5) (\ln(x^2 - 2x))' = (x^2 - 2x)' \cdot \frac{1}{(x^2 - 2x)} = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x};$$

$$6) ((3x^2 - 2) \log_3 x)' = (3x^2 - 2)' \log_3 x + (3x^2 - 2) (\log_3 x)' = 6x \log_3 x + \frac{3x^2 - 2}{x \ln 3}.$$

$$836. 1) (\sin x + x^2)' = \cos x + 2x; \quad 2) (\cos x - 1)' = -\sin x;$$

$$3) (\cos x + e^x)' = -\sin x + e^x; \quad 4) (\sin x - 2^x)' = \cos x - 2^x \ln 2.$$

$$837. 1) (\sin(2x-1))' = 2 \cos(2x-1); \quad 2) (\cos(x+2))' = -\sin(x+2);$$

$$3) (\sin(3-x))' = -\cos(3-x); \quad 4) (\cos(x^3))' = -3x^2 \sin(x^3).$$

$$838. 1) \left(\cos\left(\frac{x}{2}-1\right) + e^{3x} \right)' = \left(\frac{x}{2}-1\right)' \left(-\sin\left(\frac{x}{2}-1\right)\right) + (3x)' e^{3x} = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}-1\right) + 3e^{3x}$$

$$2) \left(\sin\left(\frac{x}{3}+3\right) + 2^x \right)' = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{x}{3}+3\right) + 2^x \ln 2;$$

$$3) \left(3 \cos 4x - \frac{1}{2x} \right)' = 3 \cdot (4x)' (-\sin 4x) + \frac{1}{2x^2} = -12 \sin 4x + \frac{1}{2x^2}.$$

$$839. 1) \left(\frac{\cos x}{e^x} \right)' = \frac{-\sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x}{(e^x)^2} = -\frac{\sin x + \cos x}{e^x};$$

$$2) \left(\frac{3^x}{\sin x} \right)' = \frac{3^x \ln 3 \cdot \sin x - 3^x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{3^x \ln 3}{\sin x} - \frac{3^x \cos x}{\sin^2 x};$$

$$3) \ln x \cdot \cos 3x = \frac{\cos 3x}{x} - 3 \ln x \cdot \sin 3x;$$

$$4) (\log_3 x \cdot \sin 2x)' = (\log_3 x)' \sin 2x + \log_3 x (\sin 2x)' = \frac{\sin 2x}{x \ln 3} + 2 \log_3 x \cos 2x.$$

$$840. 1) f'(x) = 2e^{2x-4} + \frac{2}{x}, \quad f'(2) = 2e^0 + 1 = 3.$$

$$2) f'(x) = 3e^{3x-2} - \frac{3}{3x-1}, \quad f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3 - 3 = 0.$$

$$3) f'(x) = 2^x \ln 2 - \frac{1}{x \ln 2}, \quad f'(1) = 2 \ln 2 - \frac{1}{\ln 2}.$$

$$4) f'(x) = \frac{1}{x \ln 0,5} - 3^x \ln 3, \quad f'(1) = \frac{1}{\ln 0,5} - 3 \ln 3.$$

841. 1) $f(x) = x - \cos x$. Решение: $f'(x) = 1 + \sin x$, т.е. $1 + \sin x = 0$, откуда

$$\sin x = -1, x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}. \text{ Ответ: } x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

2) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$. Решение: $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$, т.е. $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}. \text{ Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

3) $f(x) = 2 \ln(x+3) - x$. Решение: $f'(x) = \frac{2}{x+3} - 1$, т.е. $\frac{2}{x+3} - 1 = 0$, откуда $x+3 = 2$, $x = -1$. Ответ: $x = -1$.

4) Указание: аналогично 3), $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 2$.

5) Указание: аналогично 6), $f'(x) = 2x + 2 - \frac{12}{x}$.

6) $f(x) = x^2 - 6x - 8 \ln x$. Решение: $f'(x) = 2x - 6 - \frac{8}{x}$, откуда $2x - 6 - \frac{8}{x} = 0$, $\frac{2(x^2 - 3x - 4)}{x} = 0$, откуда $x = 4$ и $x = -1$ (не удовлетворяет области определения функции $f(x)$). Ответ: $x = 4$.

842. 1) Указание: $f'(x) = e^x - 1$, аналогично 3).

2) Указание: $f'(x) = \ln 2 - 2^x \ln 2 = \ln 2(1 - 2^x)$, аналогично 3).

3) $f(x) = e^x x^2$. Решение: $f'(x) = e^x x^2 + e^x \cdot 2x = e^x \cdot x(x+2)$. Таким образом: $e^x \cdot x(x+2) > 0$, откуда (т.к. $e^x > 0$ при всех x) $x > 0$ или $x < -2$.
Ответ: $x > 0$, $x < -2$.

4) $f(x) = e^x \sqrt{x}$. Решение: $f'(x) = e^x \sqrt{x} + e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{(2x+1)e^x}{2\sqrt{x}} > 0$, откуда $x > -0.5$. С учетом О.О. функций $f(x)$ и $f'(x)$ окончательно получаем $x > 0$. Ответ: $x > 0$.

$$843. 1) \left(\sqrt{\frac{2x-1}{3}} + \ln \frac{2x+3}{5} \right)' = \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right)' \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-1}{3}}} + \left(\frac{2}{5}x + \frac{3}{5} \right)' \frac{5}{2x+3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2x-1}} + \frac{2}{2x+3}.$$

$$2) \left(\sqrt{\frac{1-x}{6}} - 2 \ln \frac{2-5x}{3} \right)' = -\frac{1}{2 \cdot 6} \left(\frac{1-x}{6} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2 \cdot 3}{2-5x} \cdot (-5) = -\frac{1}{2\sqrt{6(1-x)}} + \frac{30}{2-5x};$$

$$3) \left(2e^{\frac{1-x}{3}} + 3 \cos \frac{1-x}{2} \right)' = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x \right) e^{\frac{1-x}{3}} - 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \right) \sin \frac{1-x}{2} =$$

$$= -\frac{2}{3} e^{\frac{1-x}{3}} + \frac{3}{2} \sin \frac{1-x}{2}.$$

$$4) \left(3e^{\frac{2-x}{3}} - 2 \sin \frac{1+x}{4} \right)' = 3e^{\frac{2-x}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) - 2 \cos \frac{1+x}{4} \cdot \frac{1}{4} = -e^{\frac{2-x}{3}} - \frac{1}{2} \cos \frac{1+x}{4}.$$

$$844. 1) \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2-x}} - 3 \cos \frac{x-2}{3} \right)' = \left(\left(\frac{2-x}{3} \right)^{-\frac{1}{3}} \right)' + 3 \sin \frac{x-2}{3} \cdot \left(\frac{x-2}{3} \right)' = \frac{1}{9} + \sin \frac{x-2}{3}.$$

$$2) \left(2\sqrt{\frac{1}{(x+2)^3}} - 5e^{\frac{x-4}{5}} \right)' = 2 \left((x+2)^{-\frac{3}{4}} \right)' - 5 \cdot \frac{1}{5} e^{\frac{x-4}{5}} = -\frac{3}{2} (x+2)^{-\frac{7}{4}} - e^{\frac{x-4}{5}}.$$

$$845. 1) (0,5^x \cdot \cos 2x)' = (0,5^x)' \cos 2x + 0,5^x (\cos 2x)' = 0,5^x \ln 0,5 \cdot \cos 2x - 0,5^x \cdot 2 \sin 2x$$

$$2) (5\sqrt{x} \cdot e^{-x})' = \frac{5}{2\sqrt{x}} e^{-x} - 5\sqrt{x} \cdot e^{-x} = \frac{5(1-2x)}{2\sqrt{x}} e^{-x}.$$

$$3) (e^{3-2x} \cdot \cos(3-2x))' = -2e^{3-2x} \cos(3-2x) - 2e^{3-2x} \sin(3-2x) =$$

$$= -2e^{3-2x} (\sin(3-2x) + \cos(3-2x)).$$

$$846. 1) (\ln \sqrt{x-1})' = (\sqrt{x-1})' \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2(x-1)};$$

$$2) \text{ Указание: } (e^{\sqrt{x+3}})' = (\sqrt{x+3})' e^{\sqrt{x+3}};$$

$$3) (\ln(\cos x))' = (\cos x)' \cdot \frac{1}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x;$$

$$4) (\ln(\sin x))' = (\sin x)' \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

$$847. 1) (2^{\cos x+1})' = (\cos x+1)' 2^{\cos x+1} \cdot \ln 2 = -\sin x \cdot 2^{\cos x+1} \cdot \ln 2;$$

$$2) (0,5^{1+\sin x})' = (1+\sin x)' 0,5^{1+\sin x} \ln 0,5 = 0,5^{1+\sin x} \cos x \cdot \ln 0,5;$$

$$3) (\cos \sqrt[3]{x+2})' = -\left((x+2)^{\frac{1}{3}}\right)' \sin \sqrt[3]{x+2} = -\frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}} \sin \sqrt[3]{x+2};$$

$$4) (\sin(\ln x))' = (\ln x)' \cos(\ln x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}.$$

$$848. 1) (\sqrt{x^2+2x-1})' = (x^2+2x-1)' \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x-1}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}};$$

$$2) (\sqrt[3]{\sin x})' = \left((\sin x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(\sin x)^{-\frac{2}{3}} \cos x;$$

$$3) (\sqrt[4]{\cos x})' = \left((\cos x)^{\frac{1}{4}}\right)' = -\frac{1}{4}(\cos x)^{-\frac{3}{4}} \sin x = -\frac{\sin x}{4\sqrt[4]{\cos^3 x}};$$

$$4) \text{ Указание: } (\sqrt{\log_2 x})' = (\log_2 x)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{\log_2 x}}.$$

$$849. 1) \left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - (1+\cos x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1-\cos x}{\sin^2 x};$$

$$2) \frac{\sqrt{3x}}{3^x+1} = \frac{\frac{3}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}(3^x+1) - 3^x \sqrt{3x} \cdot \ln 3}{(3^x+1)^2} = \frac{\sqrt{3}(3^x+1-2 \cdot 3^x x \ln 3)}{2\sqrt{x}(3^x+1)^2};$$

$$3) \frac{e^{0,5x}}{\cos 2x-5} = \frac{0,5e^{0,5x}(\cos 2x-5) - e^{0,5x}(\cos 2x-5)'}{(\cos 2x-5)^2} = \frac{0,5e^{0,5x} - e^{0,5x}}{\cos 2x-5} = \\ = \frac{0,5e^{0,5x}}{5-\cos 2x};$$

$$4) \left(\frac{5^{2x}}{\sin 3x+7}\right)' = \frac{(2x)' \cdot 5^{2x} \ln 5(\sin 3x+7) - (3x)' \cos 3x \cdot 5^{2x}}{(\sin 3x+7)^2} = \\ = \frac{2 \cdot 5^{2x} \ln 5(\sin 3x+7) - 3 \cos 3x \cdot 5^{2x}}{(\sin 3x+7)^2};$$

$$850. 1) \text{ Указание: } \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x} \right)' = \frac{(e^x + e^{-x})x - (e^x - e^{-x})}{x^2}.$$

$$2) \left(\frac{2^x - \log_2 x}{\ln 2 \cdot x} \right)' = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{\left(2^x \ln 2 - \frac{1}{x \ln 2} \right) x - (2^x - \log_2 x)}{x^2} = \\ = \frac{2^x}{x} - \frac{1}{x^2 \ln 4} - \frac{2^x - \log_2 x}{x^2 \ln 2}.$$

$$851. 1) \text{ Указание: } \left(\frac{\sin x - \cos x}{x} \right)' = \frac{(\cos x + \sin x)x - (\sin x - \cos x)}{x^2}.$$

$$2) \left(\frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x} \right)' = \frac{-2 \cos 2x (\sin x - \cos x) - (1 - \sin 2x) (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ = \frac{-2 \cos 2x (\sin x - \cos x) - (\sin x - \cos x)^2 (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ = \frac{(\sin x - \cos x) (-2 \cos 2x + \cos 2x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{(\sin x - \cos x) (\sin^2 x - \cos^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \sin x + \cos x$$

852. 1) $f(x) = 5(\sin x - \cos x) + \sqrt{2} \cos 5x$. Решение:

$$f'(x) = 5(\cos x + \sin x) - 5\sqrt{2} \sin 5x = 5\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 5\sqrt{2} \sin 5x = \\ = 10\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{8} - 2x \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} + 3x \right). \text{ Тогда } \sin \left(\frac{\pi}{8} - 2x \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} + 3x \right) = 0, \text{ отку-}$$

$$\text{да } \frac{\pi}{8} - 2x = \pi k \text{ или } \frac{\pi}{8} + 3x = \pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}. \text{ Окончательно } x = \frac{\pi}{16} - \frac{\pi k}{2}$$

$$\text{или } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}. \text{ Ответ: } x = \frac{\pi}{16} - \frac{\pi k}{2}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$2) \text{ Указание: аналогично 1), } f'(x) = 10 \sin 2x + 2(\cos x + \sin x) - 2 = \\ = 5(\sin x + \cos x)^2 + 2(\cos x + \sin x) - 7 = 10 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 7.$$

853. 1) $f(x) = e^{2x} \ln(2x-1)$. Решение: область определения функции $x > 0,5$.

Тогда $f(x) = 0$ равносильно уравнению $\ln(2x-1) = 0$, откуда $x_0 = 1$.

$$f'(x) = 2e^{2x} \ln(2x-1) + \frac{2e^{2x}}{2x-1}, \text{ тогда } f'(x_0) = 2e^2 \ln 1 + \frac{2e^2}{1} = 2e^2. \text{ Ответ: } 2e^2.$$

2) Указание: аналогично 1). $f(x) = 0$ в точках $x = \pi k + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$f'(x) = \frac{(\cos x + \sin x) \sin x - (\sin x - \cos x) \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

854. Указание: $f'(x) = \sin 2x + 2x \cos 2x$.

855. 1) Указание: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, аналогично 3).

2) Указание: $f'(x) = \ln x + 1$, аналогично 3).

3) $f(x) = x^2 \ln x$. Решение: $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$. Область определения функции $f'(x)$ $x > 0$, поэтому $f'(x) = 0$ равносильно

$\ln x = -0,5$, откуда $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Тогда $f'(x) > 0$ при $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ и $f'(x) < 0$ при

$0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$. Ответ: $f'(x) = 0$ при $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$; $f'(x) > 0$ при $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$; $f'(x) < 0$

при $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$.

4) Указание: $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x} = \frac{3(x^3 - 1)}{x}$, аналогично 3).

856. Найти производную $\ln(x^2 - 5x + 6)$ при $x < 2$ и при $x > 3$.

Решение: на указанном промежутке $x^2 - 5x + 6 > 0$, таким образом

$$\left(\ln(x^2 - 5x + 6)\right)' = \frac{(x^2 - 5x + 6)'}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}. \text{ Ответ: } \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}.$$

§48. Геометрический смысл производной

Основные понятия:

Значение производной в точке равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Общий вид уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

857. Найти значения k и b , если прямая $y = kx + b$ проходит через точку $(x_0; y_0)$ и образует с осью OX угол α :

1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = 2$, $y_0 = -3$. Решение: $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, тогда

$-3 = 1 \cdot 2 + b$, откуда $b = -5$. Ответ: $k = 1$; $b = -5$.

2)–4) Аналогично 1).

858. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 :

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$. Решение: угловой коэффициент касательной равен

$k = f'(x_0)$. $f'(x) = 3x^2$, откуда $k = 3$. Ответ: $k = 3$.

2)–4) Аналогично 1).

859. Найти угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью OX :

1), 2) Аналогично 3).

3) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 3$. Решение: найдем угловой коэффициент,

$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, откуда $k = f'(x_0) = f'(3) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

4) Указание: $f'(x) = -\frac{9}{x\sqrt{x}}$, аналогично 3).

5) Указание: $f'(x) = \frac{3}{2}e^{\frac{3x+1}{2}}$, аналогично 3).

6) Указание: $f'(x) = \frac{2}{2x+1}$, аналогично 3).

860. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 :

1) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$. Решение: $f'(x) = 2x + 1$, откуда $f'(1) = 3$. Тогда

уравнение касательной имеет вид $y = 3(x-1) + f(1)$, т.е. $y = 3x$.

Ответ: $y = 3x$.

2) Аналогично 1).

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$. Решение: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, откуда $f'(3) = -\frac{1}{9}$. Тогда

уравнение касательной имеет вид $y = -\frac{1}{9}(x-3) + f(3)$, т.е. $y = -\frac{x}{9} + \frac{2}{3}$.

Ответ: $y = -\frac{2}{9}x + 1$.

4) Указание: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, аналогично 1), 3).

5) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Решение: $f'(x) = \cos x$, откуда $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда уравнение касательной имеет вид $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$, то есть

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Ответ: } y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + 1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

6) Указание: $f'(x) = e^x$, аналогично 1), 3).

7) Указание: $f'(x) = \frac{1}{x}$, аналогично 1), 3).

8) Указание: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, аналогично 1), 3).

861. 1) Указание: производная принимает положительные значения в точках A , B и E ; отрицательные значения в точках D и G ; нулевые значения в точках C и F .

2) Указание: производная принимает положительные значения в точках C и G ; отрицательные значения в точках A и E ; нулевые значения в точках B , D и F .

862. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 0$.

1) $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$. Решение: $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$, $f'(0) = 0$, $f(0) = 1$. Тогда

уравнение касательной имеет вид $y = 0 \cdot (x-0) + 1$, т.е. $y = 1$. Ответ: $y = 1$.

2) Указание: $f'(x) = 2 \cos 2x - \frac{1}{x+1}$, аналогично 1).

863. Найти угол между осью OY и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 0$.

1) $f(x) = x + e^{-x}$. Решение: найдем угловой коэффициент касательной в точке $x = 0$, $f'(x) = 1 - e^{-x}$, откуда $f'(0) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$. Тогда угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 0$ и осью OX равен $\alpha = \arctg 0 = 0$, тогда угол между осью OY и касательной к

графику функции равен $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2}$. Ответ: $\beta = \frac{\pi}{2}$.

2) Аналогично 1).

3) Указание: аналогично 1), $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, откуда $\beta = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{2}$.

864. Под каким углом пересекаются графики функций:

1) $y = 8 - x$ и $y = 4\sqrt{x+4}$. Решение: найдем точку пересечения графиков:

$8 - x = 4\sqrt{x+4}$; $x^2 - 16x + 64 = 16x + 64$, откуда $x = 0$ или $x = 32$ (посторонний корень). Напишем уравнение касательной к графику каждой из функций в точке $x_0 = 0$. Т.к. график первой функции – прямая, то касательная совпадает с $y = 8 - x$. Для второй функции $(4\sqrt{x+4})' = \frac{2}{\sqrt{x+4}}$,

откуда $y = 1 \cdot (x - 0) + 8$, $y = x + 8$ (см. рис. 104). Угол наклона первой прямой равен $\arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$, а второй $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$. Тогда угол между пря-

мыми и равен $\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$. Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

2) Указание: аналогично 1) находим координаты точки пересечения графиков $x_0 = 0$. Уравнение касательной к первому графику $y = x + \frac{1}{2}$, ко второму $y = -x + \frac{1}{2}$. См. рис. 105.

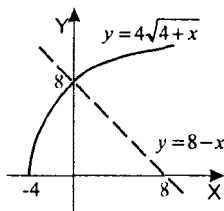


Рис. 104

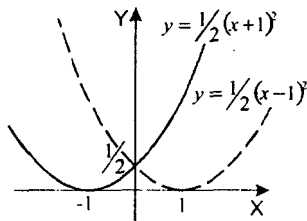


Рис. 105

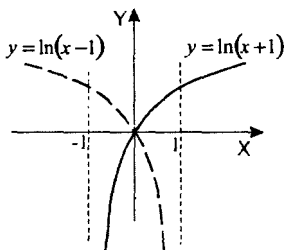


Рис. 106

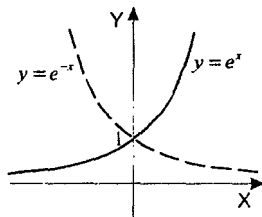


Рис. 107

3) $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ и $y = \ln(1-x)$. Решение: находим точку пересечения

графиков $x_0 = 0$. Тогда $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$, т.е. уравнение одной касатель-

ной $y = x$; $(\ln(1-x))' = -\frac{1}{1-x}$, откуда уравнение второй касательной

$y = -x$ (см. рис. 106). Угол наклона первой прямой равен $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, а

второй $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Тогда угол между прямыми равен $\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

4) Указание: аналогично 3), см. рис. 107.

865. Показать, что графики двух данных функций имеют одну общую точку и в этой точке общую касательную. Написать уравнение этой касательной:

1) $y = x^4$ и $y = x^6 + 2x^2$. Решение: рассмотрим уравнение $x^4 = x^6 + 2x^2$, $x^2(x^4 - x^2 + 2) = 0$. Оно имеет единственный корень $x_0 = 0$ (выражение в скобке является квадратным трехчленом относительно x^2 , $D < 0$). Напишем уравнение касательной к каждой из функций в точке $x_0 = 0$.

$(x^4)' = 4x^3$, тогда $y = 0$ и $(x^6 + 2x^2)' = 6x^5 + 4x$, тогда касательная прямая также $y = 0$. Ответ: общая касательная в точке $x_0 = 0$ $y = 0$.

2) Аналогично 1).

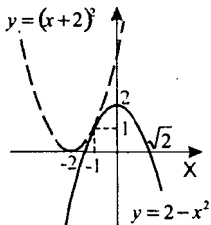


Рис. 108

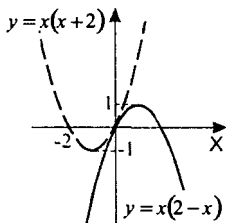


Рис. 109

3) $y = (x+2)^2$ и $y = 2-x^2$. Решение: рассмотрим уравнение $(x+2)^2 = 2-x^2$, $2x^2 + 4x + 2 = 0$, $2(x+1)^2 = 0$. Оно имеет единственный корень $x_0 = -1$. Напишем уравнение касательной к каждой из функций в

точке $x_0 = -1$. $\left((x+2)^2\right)' = 2(x+2)$, т.е. $y = 2(2-1)(x+1) + (-1+2)^2$,

$y = 2x + 3$; $(2-x^2)' = -2x$. Тогда касательная прямая

$y = (-2) \cdot (-1) \cdot (x+1) + (2-(-1)^2)$, то есть также $y = 2x + 3$ (см. рис. 108).

Ответ: общая касательная в точке $x_0 = -1$ $y = 2x + 3$.

4) Аналогично 3). См. рис. 109.

866. Найти точки графика функции $y = f(x)$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y = kx$:

1) $f(x) = e^x + e^{-x}$, $k = \frac{3}{2}$. Решение: прямые параллельны, если их угловые коэффициенты совпадают, т.е. необходимо $f'(x) = \frac{3}{2}$.

$f'(x) = e^x - e^{-x}$, откуда $e^x - \frac{1}{e^x} = \frac{3}{2}$, т.е. $e^x = 2$ или $e^x = -\frac{1}{2}$ (посторон-

нее решение). Тогда $x = \ln 2$. Ответ: $x = \ln 2$.

2)–4) Аналогично 1).

867. Указание: решите уравнение $y'(x) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

868. Найти точки, в которых касательные к кривым $f(x) = x^3 - x - 1$ и $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$ параллельны. Написать уравнение этих касательных.

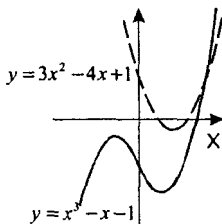


Рис. 110

Решение: $f'(x) = 3x^2 - 1$, $g'(x) = 6x - 4$. Необходимо решить уравнение $f'(x) = g'(x)$, т.е. $3(x-1)^2 = 0$, откуда $x = 1$. Тогда уравнение касательной к графику $y = f(x)$ $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, т.е. $y = 2x - 3$. А уравнение касательной к графику $y = g(x)$ $y = g'(1)(x-1) + g(1)$, т.е. $y = 2x - 2$.

Ответ: $x = 1$, $y = 2x - 3$ и $y = 2x - 2$. См. рис. 110

Упражнения к главе VIII

869. 1) $(2x^4 - x^3 + 3x + 4)' = 2 \cdot 4x^3 - 3x^2 + 3 = 8x^3 - 3x^2 + 3$;

2) $(-x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 1)' = -5x^4 + 6x^2 - 6x$;

3) $\left(6\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}\right)' = \left(6x^{\frac{1}{3}} + x^{-2}\right)' = 2x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-3}$;

4) $\left(\frac{2}{x^3} - 8\sqrt{x}\right)' = \left(2x^{-3} - 8x^{\frac{1}{2}}\right)' = -6x^{-4} - 2x^{-\frac{3}{2}}$;

5) $((2x+3)^8)' = 16(2x+3)^7$; 6) $((4-3x)^7)' = -21(4-3x)^6$;

7) $(\sqrt[3]{3x-2})' = \left((3x-2)^{\frac{1}{3}}\right)' = (3x-2)^{-\frac{2}{3}}$;

8) $\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\right)' = \left((1-4x)^{-\frac{1}{2}}\right)' = 2(1-4x)^{-\frac{3}{2}}$.

870. Указание: воспользуйтесь формулами из §47.

871. 1) $(\sin 5x + \cos(2x-3))' = 5 \cos 5x - 2 \sin(2x-3)$;

2) $(e^{2x} - \ln 3x)' = 2e^{2x} - \frac{3}{3x}$;

3) $(\sin(x-3) - \ln(1-2x))' = \cos(x-3) + \frac{2}{1-2x}$;

4) $\left(6 \sin \frac{2x}{3} - e^{1-3x}\right)' = 4 \cos \frac{2x}{3} + 3e^{1-3x}$.

872. 1)–4), 6) Аналогично 5).

$$5) (e^{-x} \sin x)' = (e^{-x})' \sin x + e^{-x} (\sin x)' = (-x)' e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = \\ = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x} (\cos x - \sin x);$$

$$873.1) \left(\frac{x^3+1}{x^2+1} \right)' = \frac{(x^3+1)'(x^2+1) - (x^3+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$

2)–4) Аналогично 1).

$$874. 1) (\sin^3 x)' = 3 \sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3 \sin^2 x \cos x;$$

$$2) (8^{\cos x})' = 8^{\cos x} \ln 8 \cdot (\cos x)' = -8^{\cos x} \ln 8 \cdot \sin x;$$

3) Аналогично 1).

$$4) (\ln(x^3))' = \frac{1}{x^3} \cdot (x^3)' = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}.$$

$$875. 1) \text{ Указание: } f'(x) = 6x^2 - 2x.$$

$$2) \text{ Указание: } f'(x) = -9x^2 + 4x.$$

$$3) \text{ Указание: } f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 20 = 5(x^2 - 4)(x^2 + 1).$$

$$4) \text{ Указание: } f'(x) = 3(x+3)^2(x-4)^2 + 2(x+3)^2(x-4) = \\ = (x+3)^2(x-4)(3x-12+2x+6).$$

$$5) \text{ Указание: } f'(x) = \frac{3(x-2) - (3x+1)}{(x-2)^2} = -\frac{7}{(x-2)^2}.$$

$$6) \text{ Указание: } f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3-1)}{x^2}.$$

$$876. 1) f'(x) = -\sin x \sin x + \cos x \cos x = \cos 2x, \text{ тогда } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

2) Аналогично 1).

3) Аналогично 4).

$$4) f'(x) = \frac{(1+e^x) - xe^x}{(1+e^x)^2}, \text{ тогда: } f'(0) = \frac{2-0}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

$$877. 1)–3) \text{ аналогично 4).}$$

4) $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Решение: по формуле уравнения касательной име-

$$\text{ем } y = \cos \frac{\pi}{3} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \cos \frac{\pi}{3}, \text{ т.е. } y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } y = -\frac{\sqrt{3}}{2} x + \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \right).$$

878. Указание: скорость тела $v(t) = s'(t) = t + 3$.

879. 1) $(\cos^2 3x)' = 2 \cos 3x \cdot (\cos 3x)' = -2 \cos 3x \sin 3x \cdot 3 = -3 \sin 6x$.

2) Аналогично 3).

3) $((x^3 + 1)\cos 2x)' = (x^3 + 1)' \cos 2x + (x^3 + 1)(\cos 2x)' = 3x^2 \cos 2x - 2(x^3 + 1)\sin 2x$;

4) Аналогично 1).

5) $((x+1)\sqrt{x^2})' = (x+1)' \sqrt{x^2} + (x+1) \left(x^{\frac{2}{3}} \right)' = \sqrt{x^2} + \frac{2(x+1)}{3\sqrt{x}} = \frac{5x+2}{3\sqrt{x}}$

6) Аналогично 5).

880. 1) Аналогично 4).

2) Аналогично 3).

3) $\left(\frac{x}{\sqrt{x+2}} \right)' = \frac{\sqrt{x+2} - \frac{x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2} = \frac{x+4}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}}$.

4) $\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$
 $= \frac{-1 + \sin 2x - 1 - \sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2} = -\frac{2}{1 - \sin 2x}$.

881. 1) $(\log_2(x^3 - x^2 + 1))' =$

$$= \frac{1}{\ln 2(x^3 - x^2 + 1)} \cdot (x^3 - x^2 + 1)' = \frac{3x^2 - 2x}{\ln 2(x^3 - x^2 + 1)}$$

2) $((\log_2 x)^y)' = 3(\log_2 x)^2 (\log_2 x)' = \frac{3 \log_2^2 x}{x \ln 2}$.

3) Указание: $(\sin(\log_3 x))' = \cos(\log_3 x) \cdot (\log_3 x)'$.

4) Указание: $(\cos 3^x)' = -\sin 3^x \cdot (3^x)'$.

882. Ответ: г), а), в), б).

883. Найти значения x , при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) Указание: $f'(x) = (2^x - 2^{-x}) \ln 2$.

2) Указание: $f'(x) = 2 \cdot 3^{2x} \ln 3 - 2 \ln 3 = 2 \ln 3(3^{2x} - 1)$.

3) Указание: $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$ при $x > 0$.

4) Указание: $f'(x) = 1 + \frac{2}{2x+1} = \frac{2x+3}{2x+1}$ при $x > -0,5$.

5) $f(x) = 6x - x\sqrt{x}$. Решение: область определения функции $x \geq 0$. Тогда

$$f'(x) = 6 - \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = 6 - \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}(4 - \sqrt{x}). \text{ Т.е. } f'(x) = 0 \text{ при } x = 16,$$

$f'(x) > 0$ при $0 \leq x < 16$ и $f'(x) < 0$ при $x > 16$.

Ответ: $f'(x) = 0$ при $x = 0$; $f'(x) > 0$ при $0 \leq x < 16$; $f'(x) < 0$ при $x > 16$.

6) Указание: $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x+1} - 3$, аналогично 5).

884. Аналогично задаче 885.

885. Найти все значения a , при которых $f'(x) \leq 0$ для всех действительных

значений x , если $f(x) = ax^3 - 6x^2 - x$. Решение: $f'(x) = 3ax^2 - 12x - 1$ — квадратный трехчлен. Для того, чтобы $f'(x) \leq 0$ для всех действительных

значений x необходимо и достаточно $\begin{cases} a < 0 \\ D = 144 + 12a \leq 0 \end{cases}, \begin{cases} a < 0 \\ 12(a+12) \leq 0 \end{cases}$, от-

куда $a \leq -12$. Ответ: $a \leq -12$.

886. Найти все значения a , при которых уравнение $f'(x) = 0$ не имеет действительных корней, если:

1) $f(x) = ax^2 - \frac{1}{x^2}$. Решение: $f'(x) = 2ax + \frac{2}{x^3} = \frac{2(ax^4 + 1)}{x^3}$. Т.е. необходимо,

чтобы уравнение $ax^4 + 1 = 0$ не имело корней, откуда $a \geq 0$. Ответ: $a \geq 0$.

2) Аналогично 1).

3), 4) Аналогично задаче 885.

887. Найти все значения a , при которых неравенство $f'(x) < 0$ не имеет действительных решений, если:

1) $f(x) = ax^7 + x^3 - 1$. Решение: $f'(x) = 7ax^6 + 3x^2 = x^2(7ax^4 + 3)$. То есть $x^2(7ax^4 + 3) \geq 0$ при всех x , откуда $a \geq 0$. Ответ: $a \geq 0$.

2) Аналогично 1).

3) $f(x) = (x+a)\sqrt{x}$. Решение: $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x+a}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+a}{2\sqrt{x}}$. Необходимо,

чтобы $\frac{3x+a}{2\sqrt{x}} \geq 0$ для всех x из области определения $f(x)$ и $f'(x)$, т.е. для

всех $x > 0$, поэтому $a \geq 0$. Ответ: $a \geq 0$.

4) Аналогично 3).

888. 1) $y = 2\sqrt{x}$ и $y = 2\sqrt{6-x}$. Решение: найдем координаты точки пересече-

ния, $2\sqrt{x} = 2\sqrt{6-x}$, откуда $x = 3$. Тогда $(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, т.е. угол наклона касательной к первому графику равен $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. $(2\sqrt{6-x})' = -\frac{1}{\sqrt{6-x}}$, от-

куда угол наклона касательной ко второму графику равен

$\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{\pi}{6}$. Тогда угол между графиками равен $\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3}$.

Отвст: $\frac{\pi}{3}$.

2) Указание: аналогично 1), угол наклона второй прямой равен 0.

889. 1) Указание: $y' = \cos \frac{x}{2}$.

2) Указание: $y' = -2^{-x} \ln 2 + 2^{-2x+1} \ln 2$.

3) Указание: $y' = \frac{(3-x)+(x+2)}{(3-x)^2}$.

4) Указание: $y' = 1 + \frac{1}{x}$.

890. Найти уравнение касательных к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$, параллельных прямой $y = 6x$. Решение: для того чтобы прямые были параллельны, необходимо совпадение их угловых коэффициентов, т.е.

$f'(x) = 6$. Тогда $x^2 - 5x = 6$, откуда $x_1 = 6$ и $x_2 = -1$. Тогда уравнение первой касательной $y = 6(x-6) - 18$, а уравнение второй касательной

$y = 6(x+1) - 2\frac{5}{6}$. Отвст: $y = 6x - 54$, $y = 6x + 3\frac{1}{6}$.

891. Указание: см. рис. 111, уравнение касательной $y = -4x + 8$, тогда площадь треугольника равна $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2$.

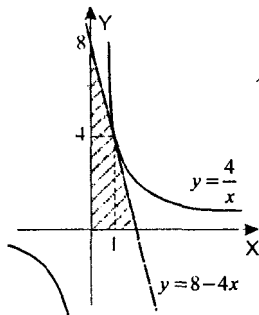


Рис. 111

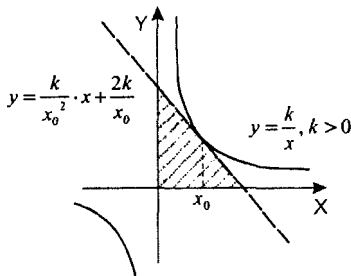


Рис. 112

892. Указание: общий вид уравнения касательной: $y = -\frac{k}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{k}{x_0}$, т.е.

$$y = -\frac{k}{x_0^2}x + \frac{2k}{x_0}. \text{ См. рис. 112.}$$

893. Указание: уравнение касательной имеет вид:

$$y = (3x_0^2 - p)(x - x_0) + x_0^3 - px_0, \text{ откуда } 3 = (3 - p)(2 - 1) + 1 - p.$$

894. Указание: $y' = \frac{1}{\ln 4}(4^x \ln 4 - 2^{x+1} \ln 2) = 4^x - \frac{1}{2} \cdot 2^{x+1} = 4^x - 2^x$. Решите

уравнение $4^x - 2^x = 2$. Аналогично задаче 890

895. Найти расстояние от начала координат до той касательной к графику функции $y = x \ln x$, которая параллельна оси абсцисс. Решение:

$y' = \ln x + 1$, необходимо $\ln x + 1 = 0$, откуда $x = \frac{1}{e}$. Тогда уравнение та-

кой касательной $y = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e}$, $y = -\frac{1}{e}$. Таким образом, расстояние до начала координат равно $\frac{1}{e}$ (см. рис. 113). Ответ: $\frac{1}{e}$.

896. Выяснить, при каких значениях параметра a прямая $y = ax - 2$ касается графика функции $y = 1 + \ln x$. Решение: пусть прямая касается графика в точке x_0 , тогда

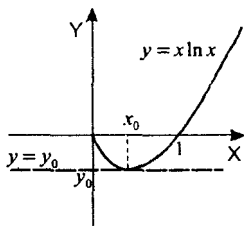


Рис. 113

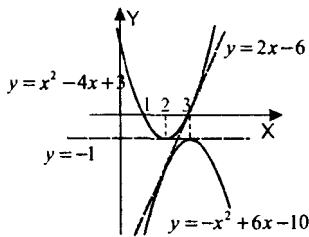


Рис. 114

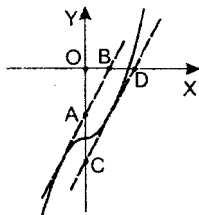


Рис. 115

$y = \frac{1}{x_0}(x - x_0) + 1 + \ln x_0$ и $y = ax - 2$ совпадают. Т.е. $\begin{cases} \frac{1}{x_0} = a \\ \ln x_0 = -2 \end{cases}$, откуда

$$x_0 = \frac{1}{e^2} \text{ и } a = e^2. \text{ Ответ: } a = e^2.$$

- 897.** Найти общие касательные к графикам функций $f(x) = x^2 - 4x + 3$ и $g(x) = -x^2 + 6x - 10$. Решение: пусть общая касательная касается первого графика в точке x_1 , а второго в точке x_2 (см. рис. 114). Тогда прямые $y = (2x_1 - 4)(x - x_1) + x_1^2 - 4x_1 + 3$ и $y = (-2x_2 + 6)(x - x_2) - x_2^2 + 6x_2 - 10$ совпадают. Т.е. $\begin{cases} 2x_1 - 4 = -2x_2 + 6 \\ -x_1^2 + 3 = x_2^2 - 10 \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_2^2 + x_1^2 = 13 \end{cases}$. откуда получаем два решения: (2; 3) и (3; 2). Значит уравнение первой общей касательной $y = -1$, а уравнение второй — $y = 2x - 6$. Ответ: $y = -1$; $y = 2x - 6$.

- 898.** Указание: $y' = 3x^2$, т.к. угловые коэффициенты касательных совпадают, то если одна прямая касается графика в точке с абсциссой x_0 , то другая — в точке с абсциссой $-x_0$. См. рис. 115.

Глава IX

Применение производной к исследованию функций

§49. Возрастание и убывание функции

Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на промежутке, то функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

Теорема 1

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, существует точка $c \in (a; b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Теорема 2

Если $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех x , то функция возрастает (убывает) на $(a; b)$.

899. Доказать, что функция $f'(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ возрастает на промежутке $x > 1$, убывает на промежутках $x < 0$ и $0 < x < 1$.

Решение: $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}$. При $x > 1$ $f'(x) > 0$, поэтому по теореме 2 $f(x)$ возрастает, а при $x < 0$ и $0 < x < 1$ $f'(x) < 0$, поэтому $f(x)$ убывает, ч.т.д.

900. Найти интервалы возрастания и убывания функции.

1) $y = x^2 - x$. Решение: $y' = 2x - 1$. $y' > 0$ при $x > \frac{1}{2}$, т.е. при $x > \frac{1}{2}$ функция возрастает и $y' < 0$ при $x < \frac{1}{2}$.

Ответ: функция возрастает при $x > \frac{1}{2}$ и убывает при $x < \frac{1}{2}$.

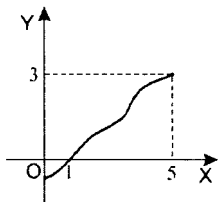


Рис. 116

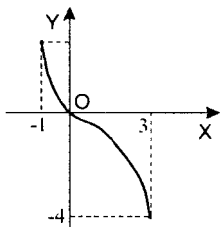


Рис. 117

2)–6), 8) аналогично 1), 7).

7) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$. Решение: $y' = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x-3)(x+2)$.

Откуда $y' > 0$ при $x > 3$ и $x < -2$ и $y' < 0$ при $-2 > x > 3$.

Ответ: функция возрастает при $x > 3$ и $x < -2$ и убывает при $-2 > x > 3$.

901. Построить эскиз графика непрерывной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = 0, b = 5, f'(x) > 0$ при $0 < x < 5, f(1) = 0, f(5) = 3$.

Решение: так как $f'(x) > 0$ на $(0; 5)$, то функция $f(x)$ возрастает (см. рис. 116).

2) $a = -1, b = 3, f'(x) < 0$ при $-1 < x < 3, f(0) = 0, f(3) = -4$.

Решение: так как $f'(x) < 0$, то на $(-1; 3)$ функция убывает. График $f(x)$ проходит через точки $(0; 0)$ и $(3; -4)$. См. рис. 117.

Найти интервалы возрастания и убывания функции (902–905).

902. 1) $y = \frac{1}{x+2}$. Решение: $y' = -\frac{1}{(x+2)^2}$, т.е. $y' < 0$ при $x \neq -2$.

Ответ: функция убывает при $x < -2$ и $x > -2$.

2) Указание: $y' = -\frac{2}{x^2}$, аналогично 1).

3) $y = -\sqrt{x-3}$. Решение: область определения функции $x \geq 3$. Тогда

$y' = -\frac{1}{2\sqrt{x-3}}$, т.е. $y' < 0$ при $x > 3$. Ответ: функция убывает при $x > 3$.

4) Указание: область определения функции $x \geq 5$, тогда $y' = \frac{3}{2\sqrt{x-5}}$, аналогично 3).

903. 1) Указание: $y' = \frac{3x^2(x^2+3) - 2x^3 \cdot x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^4+9x^2}{(x^2+3)^2}$. См. задачу 902 п.1).

2) $y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$. Решение: $y = \frac{-16+10x-x^2}{x^2}$, тогда

$$y' = \frac{(10+2x)x^2 - 2x(-16+10x-x^2)}{x^4} = \frac{10x-2x^2+32-20x+2x^2}{x^3} = \frac{32-10x}{x^3}$$

$y' > 0$ при $0 < x < 3,2$ и $y' < 0$ при $x < 0$ и $x > 3,2$.

Ответ: функция возрастает при $0 < x < 3,2$ и убывает при $x < 0$ и $x > 3,2$.

3) Указание: $y' = e^{3x} + (x-1) \cdot e^{3x} \cdot 3 = e^{3x}(3x-2)$, аналогично 2).

4) Указание: $y' = e^{-3x} - 3xe^{-3x} = e^{-3x}(1-3x)$, аналогично 2).

904. 1) $y = e^{x^2+3x}$. Решение: $y' = (x^2+3x)' e^{x^2+3x} = (2x+3) \cdot e^{x^2+3x}$. Так как $e^{x^2+3x} > 0$ при всех x , то $y' > 0$ при $x > -1,5$ и $y' < 0$ при $x < -1,5$.

Ответ: функция возрастает при $x > -1,5$ и убывает при $x < -1,5$.

2) Аналогично 1).

905. 1) Указание: $y' = 1 - 2 \cos 2x$. Таким образом $y' > 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x < 1$ и $y' < 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x > 1$. Аналогично 2).

2) $y = 3x + 2 \cos 3x$. Решение: $y' = 3 - 6 \sin 3x$. Т.е. $y' > 0 \Leftrightarrow \sin 3x < \frac{1}{2}$,

откуда $\frac{-7\pi}{6} + 2\pi k < 3x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$, т.е. $\frac{-7\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} < x < \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

Аналогично $y' < 0 \Leftrightarrow \sin 3x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} < x < \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: функция возрастает при $\frac{-7\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} < x < \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$;

функция убывает при $\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} < x < \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

906. Изобразить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = -2, b = 6, f(-2) = -1, f(6) = 5, f(3) = 0$;

$f'(3) = 0; f'(x) > 0$ при $-2 < x < 3; f'(x) < 0$ при $3 < x < 6$.

Решение: так как на отрезке $[-2; 6]$ всюду существует производная $f'(x)$, то функция принимает на $[-2; 6]$ конечные значения. Кроме того, $f(x)$ возрастает при $-2 < x < 3$ и убывает при $3 < x < 6$, но $f(3) < f(6)$, а это противоречит тому, что $f(x)$ убывает при $3 < x < 6$.

Ответ: такой функции не существует.

2) Аналогично задаче 901 (см. рис. 118)

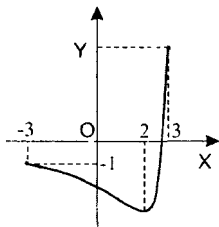


Рис. 118

907. При каких значениях a функция возрастает на всей числовой прямой:

1) $y = x^3 - ax$. Решение: $y' = 3x^2 - a$. Необходимо $3x^2 - a \geq 0$ при всех x , т.е. $a \leq 0$. Ответ: $a \leq 0$.

2) Указание: аналогично 1), необходимо $a - \cos x \geq 0$ при всех x .

908. При каких значениях a функция $y = x^3 - 2x^2 + ax$ возрастает на всей числовой прямой?

Решение: $y' = 3x^2 - 4x + a$, необходимо $y' > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Это выполняется, если $D = 16 - 12a \leq 0$, т.е. $a \geq \frac{4}{3}$. Ответ: $a \geq \frac{4}{3}$.

909. При каких значениях a функция $y = ax^3 + 3x^2 - 2x + 5$ убывает на всей числовой прямой?

Решение: $y' = 3ax^2 + 6x - 2$. Необходимо $y' < 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Это выполняется, если $a < 0$ и $D = 36 + 24a \leq 0$, т.е. $a \leq -1,5$. Ответ: $a \leq -1,5$.

§50. Экстремумы функции

Основные понятия:

Точка x_0 называется точкой *максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). Точки минимума и максимума называются *экстремальными* точками.

Теорема 1

Если x_0 – точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Теорема 2

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$ и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

- а) если при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет знак с «плюса» на «минус», то точка x_0 – точка максимума функции $f(x)$;
 б) если при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет знак с «минуса» на «плюс», то точка x_0 – точка минимума функции $f(x)$.

910. Ответ: $x_0 = -5, x_0 = 1, x_0 = 5$ – точки максимума, $x_0 = -2, x_0 = 3$ – точки минимума.

911. Ответ: $x_0 = -7, x_0 = -4, x_0 = -3, -2 \leq x_0 \leq -1, x_0 = 1, x_0 = 3$ и $x_0 = 4$ – критические точки.

912. Найти стационарные точки функции.

1), 2) аналогично 3) и 4).

3) $y = e^{2x} - 2e^x$. Решение: необходимо решить уравнение $y' = 0$, то есть $2e^{2x} - 2e^x = 0$; $2e^x(e^x - 1) = 0$. Т.к. $e^x > 0$, то уравнение равносильно уравнению $e^x = 1$, $x = 0$. Ответ: $x = 0$.

4) $y = \sin x - \cos x$. Решение: необходимо решить уравнение $y' = 0$, т.е.

$$\sin x + \cos x = 0; \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \text{ откуда } x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k; x = \frac{3\pi}{4} + \pi k,$$

$$k \in \mathbf{Z}. \text{ Ответ: } x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

913. Найти стационарные точки функции.

1) $y = \frac{2+x^2}{x}$. Решение: область определения функции $x \neq 0$. Тогда

$$y' = \frac{2x \cdot x - (2+x^2) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}. \text{ Т.е. } y' = 0 \text{ при } x = \pm\sqrt{2}. \text{ Ответ: } x = \pm\sqrt{2}.$$

2) Аналогично 1).

3) $y = e^{x^2-1}$. Решение: $y' = (x^2 - 1)' e^{x^2-1} = 2xe^{x^2-1}$. Таким образом $y' = 0$ равносильно $x = 0$. Ответ: $x = 0$.

4) Аналогично 3).

914. Найти точки экстремума функции.

1) $y = 2x^2 - 20x + 1$. Решение: $y' = 4x - 20$, т.е. $y' = 0$ при $x_0 = 5$. Так как $y' < 0$ при $x < 5$ и $y' > 0$ при $x > 5$, то $x_0 = 5$ — действительно точка экстремума (точка минимума). Ответ: $x_0 = 5$.

2) Аналогично 1).

3) $y = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$. Решение: $y' = \frac{1}{5} - \frac{5}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{5x^2}$, т.е. $y' = 0$ при $x = \pm 5$. Аналогично п. 1) убеждаемся, что это действительно экстремальные точки.

4) Аналогично 3).

915. Найти точки экстремума и значения функции в этих точках.

1) $y = x^3 - 3x^2$. Решение: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Т.е. точки экстремума $x_0 = 0$ и $x_0 = 2$ (это действительно точки экстремума, т.к. при переходе через них производная меняет знак). $y(0) = 0$ и $y(2) = -4$.

Ответ: $x_0 = 0$, $y(0) = 0$; $x_0 = 2$, $y(2) = -4$.

2) Аналогично 1).

3) $y = x + \sin x$. Решение: $y' = 1 + \cos x \geq 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$, т.е. точек экстремума нет.

4) $y = 2 \cos x + x$. Решение: $y' = -2 \sin x + 1$. $y' = 0$ при

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ — это точки экстремума (при переходе через них

производная меняет знак). Если k — нечетное, то $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$,

$y = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Если k — четное, то

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Ответ:

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $y = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} + 2\pi n$,

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

916. Имеет ли точки экстремума функция:

1)–3) Указание: производная нигде не обращается в нуль, аналогично 4).

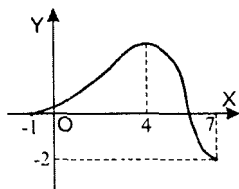


Рис. 119

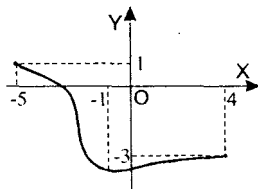


Рис. 120

4) $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$. Решение: по теореме 1 в точке экстремума $y' = 0$, но

$y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Т.е. точки экстремума нет. Ответ: не имеет

917. Указание: аналогично задачам 901 и 906.

1) См. рис. 119.

2) См. рис. 120.

918. Найти критические точки функции.

1) $y = \sqrt{2-3x^2}$. Решение: $y' = \frac{-6x}{2\sqrt{2-3x^2}} = \frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}$. $y' = 0$ при $x = 0$,

кроме того y' не существует, если $2-3x^2 = 0$, т.е. $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Ответ:

$$x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

2) Аналогично 1).

3) Аналогично 4).

4) $y = x^2 - |x| - 2$. Решение: при $x > 0$ $y = x^2 - x - 2$, т.е. $y' = 2x - 1$. При

$x = \frac{1}{2}$ $y' = 0$, т.е. $x = \frac{1}{2}$ – критическая точка. При $x < 0$ $y = x^2 + x - 2$,

$y' = 2x + 1$, т.е. $x = -\frac{1}{2}$ тоже критическая точка. Т.к. справа и слева от

точки $x = 0$ производная принимает разные значения, то в точке $x = 0$ производной не существует. Т.е. $x = 0$ – критическая точка. Ответ: $x = 0$,

$$x = \pm \frac{1}{2}.$$

919. Найти точки экстремума функции:

1) $y = x + \sqrt{3-x}$. Решение: $y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}$. Т.е. $y' = 0$ если $\frac{1}{2\sqrt{3-x}} = 1$;

$2\sqrt{3-x} = 1$; $\sqrt{3-x} = 1/2$; $3-x = 1/4$, $x = 2,75$. Это точка экстремума, т.к. при переходе через нее производная меняет знак. Ответ: $x = 2,75$.

2) Указание: $y' = \frac{6}{7}(x-1)^{-1/7}$, а $\frac{6}{\sqrt[7]{x-1}} > 0$ на всей области определения функции.

3) Аналогично задаче 915 п.4).

4) Аналогично задаче 915 п.3).

920. 1) Указание: $y' = \frac{-3(2-x)^2(3-x)^2 + 2(3-x)(2-x)^3}{(3-x)^4} =$
 $= \frac{(2-x)^2(3x-9+4-2x)}{(3-x)^3} = \frac{(2-x)^2(x-5)}{(3-x)^3}$, т.е. $x_0 = 5$ – точка экстремума.

2) Указание: $y' = \frac{(3x^2+4x)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3+2x^2)}{(x-1)^4} = \frac{x^3-3x^2-4x}{(x-1)^3} =$
 $= \frac{x(x-4)(x+1)}{(x-1)^3}$, т.е. $x_0 = 0$, $x_0 = 4$ и $x_0 = -1$ – точки экстремума.

3) Указание: $y' = 3(x-1)e^{3x} + e^{3x} = (3x-2)e^{3x}$.

4) Указание: $y' = \cos x + \cos 2x = \cos x + 2\cos^2 x - 1 = (\cos x + 1)(2\cos x - 1)$.

Точки $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ не являются экстремальными, т.к. при переходе через них производная не меняет знак.

5) Указание: $y' = \left(\sqrt{3-x^2}\right)' e^{\sqrt{3-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{3-x^2}} e^{\sqrt{3-x^2}}$.

6) Указание: $y' = \frac{1}{2\sqrt{e^x-x}} \cdot (e^x-x)' = \frac{e^x-1}{2\sqrt{e^x-x}}$.

921. Построить эскиз графика функции $y = f(x)$, непрерывной на $[a; b]$, если:

1) $a = -6$, $b = 6$; $f(-6) = -6$, $f(6) = 1$; $f'(x) > 0$ при $-6 < x < -4$, $f'(x) < 0$ при $-4 < x < -1$, $4 < x < 6$, $f'(-4) = 0$, $f'(-1) = 0$, $f'(4) = 0$. Решение: из условия следует, что точки $x_0 = -4$ и $x_0 = 4$ – точки максимума, а $x_0 = -1$ – точка минимума. Примерный вид графика изображен на рис. 121.

2) Аналогично 1). См. рис. 122.

922. Исследовать на экстремум функцию $y = (x+1)^n e^{-x}$, где n – натуральное

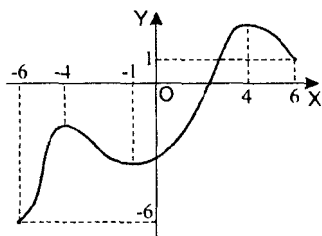


Рис. 121

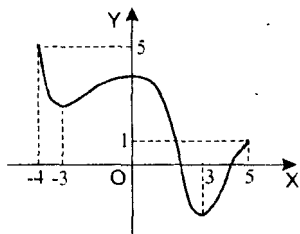


Рис. 122

число. Решение: $y' = n(x+1)^{n-1}e^{-x} - (x+1)^n e^{-x} = (x+1)^{n-1}e^{-x}(n-x-1) = (x+1)^{n-1}e^{-x}((n-1)-x)$. Нули производной – точки $x_0 = -1$ и $x_0 = n-1$. Если $n = 2k+1$, то при переходе через точку $x_0 = -1$ производная знак не меняет, следовательно $x_0 = -1$ не является экстремумом, а точка $x_0 = n-1$ – точка максимума. Если $n = 2k$, то $x_0 = -1$ – точка минимума, а $x_0 = n-1$ – точка максимума. Ответ: $x_0 = n-1$ – точка максимума и если n четно, то $x_0 = -1$ – точка минимума.

§51. Применение производной к построению графиков функций

924. Аналогично задачам 906, 921.

1) См. рис. 123.

2) См. рис. 124.

925. См. рис. 125.

926. 1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$. Решение: область определения функции $x \in \mathbb{R}$. Найдём экстремальные точки: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, т.е. $x_0 = 0$ и $x_0 = 2$.

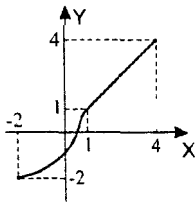


Рис. 123

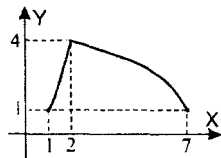


Рис. 124

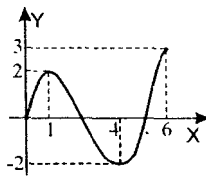


Рис. 125

Таблица 2

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$	$x = 3$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	↗	4 (max)	↘	0 (min)	↗	4

Строим таблицу (см. табл. 2). Эскиз графика на рис. 126.

2) Указание: $y' = -3x^2 + 3$; $x_0 = 1$ – точка максимума, $x_0 = -1$ – точка минимума.

3) Указание: $y' = -3x^2 + 8x - 4 = 0$ при $x_0 = 2$ и $x_0 = -\frac{2}{3}$. $x_0 = 2$ – точка максимума, $x_0 = -\frac{2}{3}$ – точка минимума.

4) Указание: $y' = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 4x + 3) = 3(x+3)(x+1)$, $x_0 = -3$ – точка максимума, $x_0 = -1$ – точка минимума.

927. 1) Указание: $y = -(x^2 - 4)^2$; $y' = -4x(x^2 - 4)$. См. рис. 127.

2) Указание: $y = (x^2 - 1)^2 + 1$; $y' = 4x(x^2 - 1)$. См. рис. 128.

3) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6$. Решение: область определения функции $x \in \mathbf{R}$. Най-

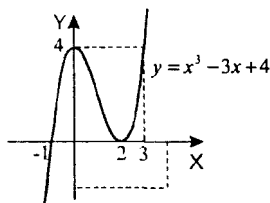


Рис. 126

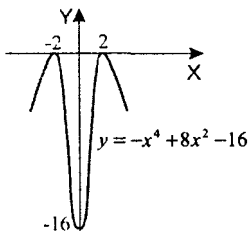


Рис. 127

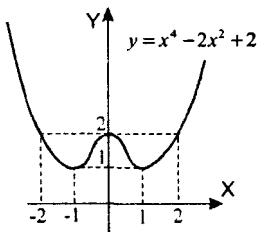


Рис. 128

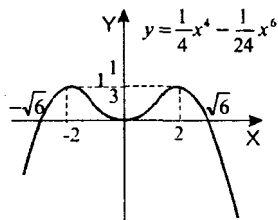


Рис. 129

дем точки пересечения графика с осью OX : $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 = 0$,

$$\frac{1}{24}x^4(6-x^2) = 0, \text{ откуда } x = 0, x = \pm\sqrt{6}. y' = x^3 - \frac{1}{4}x^5 = \frac{1}{4}x^3(4-x^2).$$

Строим таблицу (табл. 3).

Таблица 3.

x	$x = -\sqrt{6}$	$-\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$	$x = 2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < \sqrt{6}$	$x = \sqrt{6}$
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	0	-	-
$f(x)$	0	↗	$1\frac{1}{3}$ (max)	↘	0 (min)	↗	$1\frac{1}{3}$ (max)	↘	0

Эскиз графика см. на рис. 129.

4) Аналогично 3).

928. 1) Указание: $y = 0$ при $x = 1, x = \pm\sqrt{3}$; $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. См. рис. 130.

2) Указание: $y = (x^2 - 9)(x^2 - 1)$, следовательно $y = 0$ при $x = \pm 3$ и $x = \pm 1$. См. рис. 131.

929. Указание: точки экстремума – нули функции $g(x)$.

930. Аналогично задачам 926, 927.

931. 1) $y = 3x + \frac{1}{3x}$. Решение: область определения функции $x \neq 0$. Найдем

нули функции: $3x = -\frac{1}{3x}$; $9x^2 + 1 = 0$, т.е. график функции не пересекает

ось OX . $y' = 3 - \frac{1}{3x^2} = \frac{9x^2 - 1}{3x^2}$, т.е. $x = \pm\frac{1}{3}$ – точки экстремума.

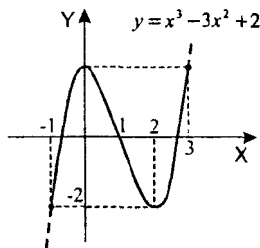


Рис. 130

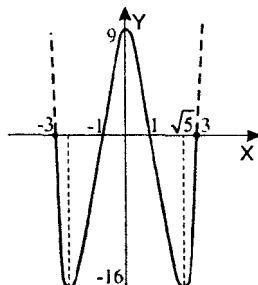


Рис. 131

Таблица 4

x	$x < -1/3$	$x = -1/3$	$-1/3 < x < 0$	$0 - 0$	$0 + 0$	$0 < x < 1/3$	$x = 1/3$	$x > 1/3$
$f'(x)$	-	0	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	-2	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	2	↗

Строим таблицу (см. табл. 4). Эскиз графика на рис. 132.

2) Аналогично 1).

3) Указание: область определения функции $x > 0$. Найдем нули функции:

$$x = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x^2 = \frac{1}{x}, \quad x^3 = 1, \quad \text{т.е. } x = 1. \quad y' = 1 + \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x} + 1}{2x\sqrt{x}}. \quad y' > 0 \text{ при}$$

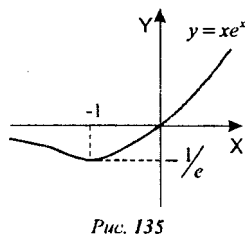
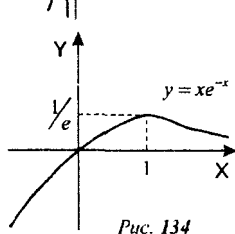
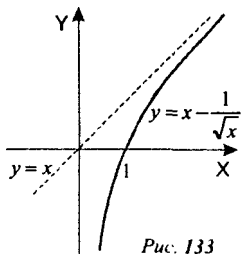
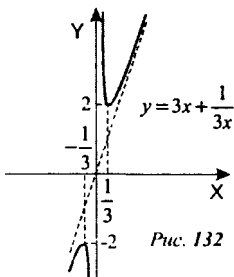
всех $x > 0$. См. рис. 133.

932. 1) $y = xe^{-x}$. Решение: область определения функции $x \in \mathbb{R}$. $y = 0$ при

$x = 0$. $y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. Строим таблицу (см. табл. 5). Эскиз графика на рис. 134.

Таблица 5

x	$x \rightarrow -\infty$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$	$x \rightarrow +\infty$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-
$f(x)$	$-\infty$	0	↗	$1/e$	↘	0



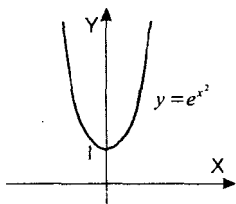


Рис. 136

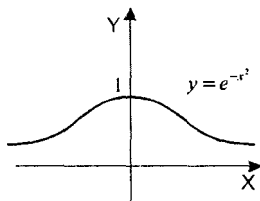


Рис. 137

- 2) Аналогично 1). См. рис. 135.
3) Аналогично 4). См. рис. 136.

4) $y = e^{-x^2}$. Решение: область определения функции $x \in \mathbf{R}$. $y > 0$ при всех x . $y' = -2xe^{-x^2}$. $y' = 0$ при $x = 0$. Строим таблицу (см. табл. 6). Эскиз графика на рис. 137.

Таблица 6

x	$x \rightarrow -\infty$	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$	$x \rightarrow +\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	↗	↗	1	↘	↘

933. 1) $y = \frac{x^2}{x-2}$. Решение: область определения функции $x \neq 2$. $y = 0$ при

$$x = 0. \quad y' = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}. \quad \text{Корни производной } x_0 = 0 \text{ и } x_0 = 4.$$

Иследуем поведение функции при $x \rightarrow \infty$:

$$\frac{x^2}{x-2} = \frac{x^2 - 2x + 2x}{x-2} = x + \frac{2x}{x-2} =$$

$$= x + \frac{2(x-2) + 4}{x-2} = x + 2 + \frac{4}{x-2}, \quad \text{т.е. при}$$

$x \rightarrow \infty$ функция стремится к $x+2$. Эскиз графика изображен на рис. 138.

2) Указание: аналогично 1), $y = -x + 3 - \frac{1}{x}$, т.е. при $x \rightarrow \infty$ $y \rightarrow 3 - x$.

3) $y = \frac{4+x-2x^2}{(x-2)^2}$. Решение: область опре-

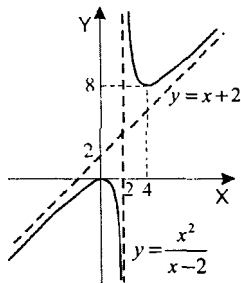


Рис. 138

деления функции $x \neq 2$. $y=0$ при $2x^2 - x - 4 = 0$, т.е. $x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$. Ис-

следуем функцию при $x \rightarrow \infty$: $y = \frac{-2(x-2)^2 - 3x + 12}{(x-2)^2} = -2 + \frac{12-3x}{(x-2)^2}$, т.е.

при $x \rightarrow \infty$ $y \rightarrow -2$. Строим таблицу (см. табл. 7). График см. на рис. 139.

Таблица 7

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{33}}{4}$	$\frac{1-\sqrt{33}}{4} < x < \frac{10}{7}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{10}{7} < x < \frac{1+\sqrt{33}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{33}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{33}}{4} < x < 2$	$x=2$	$+\infty$
$f(x)$	+	+	-	0	-	-	-	нет	+
$f(x)$	-2	0	↗	$\frac{33}{8}$	↘	0	↘	нет	-2

934. Найти число действительных корней уравнения.

1) $x^4 - 4x^3 + 20 = 0$. Решение: исследуем $f(x) = x^4 - 4x^3 + 20 = 0$ на экстремум. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$. Т.е. $x_0 = 3$ – точка минимума.

$f(3) = -7 < 0$, но при $x \rightarrow \infty$ $f(x) \rightarrow \infty$, поэтому существует два действительных корня. Ответ: два корня.

2) Аналогично 1).

935. Построить график функции $y = \frac{x^3 - 4}{(x-1)^3}$. Сколько действительных корней имеет уравнение $\frac{x^3 - 4}{(x-1)^3} = C$ при различных значениях C ?

Решение: О.О.Ф. $x \neq 1$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4}{(x-1)^3} = 1$. Исследуем функцию на экстре-

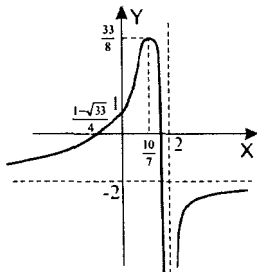


Рис. 139

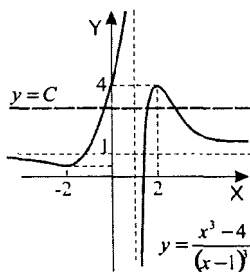


Рис. 140

$$\begin{aligned} \text{мум: } y' &= \frac{3x^2(x-1)^3 - 3(x^3 - 4)(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 3x^3 + 12}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{3(2-x)(2+x)}{(x-1)^4}. \text{ Построим таблицу (см. таблицу 8).} \end{aligned}$$

Таблица 8

x	$-\infty$	$x = -2$	$-2 < x < 1$	$1-0$	$x = 1$	$1+0$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	нет	+	+	0	-
$f(x)$	1	4/9	↗	$+\infty$	нет	$-\infty$	↖	4	1

Теперь можно построить график функции (рис. 140) и выяснить, сколько пересечений он имеет с прямой.

Ответ: $C > 4$ – уравнение имеет один корень, $C = 4, C = 1$ – два корня,

$4/9 > C > 4$ – три корня, $C = 4/9$ – два корня, $C < 4/9$ – один корень.

§52. Наибольшее и наименьшее значение функции

937. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

1) на отрезке $[-4; 3]$. Решение: найдем экстремальные точки:

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x-2)(x+3)$. То есть $f'(x) = 0$ при $x = 2$ и

$x = -3$ – это экстремальные точки. $f(-4) = 80$; $f(-3) = 81$; $f(2) = -44$;

$f(3) = -27$. Откуда минимальное значение равно -44 , а максимальное равно 81 . Ответ: -44 и 81 .

2) Аналогично 1).

938. Найти наибольшее и наименьшее значения функции.

1), 2) Аналогично 3).

3) $f(x) = \sin x + \cos x$ на отрезке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. Решение: найдем экстремаль-

ные точки: $f'(x) = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ при

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из них в промежуток $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ попадает только $\frac{5\pi}{4}$.

$f(\pi) = -1$; $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$; $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$. Таким образом минимальное

значение равно $-\sqrt{2}$, а максимальное -1 . Ответ: $-\sqrt{2}$ и -1 .

939. Аналогично задаче 938.

940. Указание: найдите минимум функции $f(x) = x^3 + (50-x)^3$ на отрезке $[0; 50]$. Аналогично задаче 942.

941. Указание: найдите минимум функции $f(x) = x^2 + \left(\frac{625}{x}\right)^2$ на интервале $(0; -\infty)$. Аналогично задаче 942.

942. Из всех прямоугольников с периметром p найти прямоугольник наибольшей площади.

Решение: пусть одна сторона прямоугольника равна x , тогда вторая сторона

равна $\frac{p}{2} - x$. Тогда площадь равна $f(x) = x \cdot \left(\frac{p}{2} - x\right)$. Найдем максимум этой функции на отрезке $\left[0; \frac{p}{2}\right]$.

$f'(x) = \left(\frac{p}{2} - x\right) - x = \frac{p}{2} - 2x$.

$f'\left(\frac{p}{4}\right) = 0$ и в этой точке достигается минимум. Ответ: квадрат со стороной $\frac{p}{4}$.

943. Аналогично задаче 942.

944. Аналогично задачам 937 и 938.

945. Найти наибольшее значение функции.

1) $3\sqrt{x} - x\sqrt{x}$ при $x > 0$. Решение: $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3-3x}{2\sqrt{x}}$. Т.е.

$x_0 = 1$ – точка максимума. $f(0) = 0$; $f(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow \infty$, поэтому наибольшее значение равно $f(1) = 2$. Ответ: 2.

2) Аналогично 1).

946. Аналогично 945.

947. Найти наибольшее значение функции.

1), 2), 4) аналогично 3).

3) $\sqrt[3]{x^2(1-x)}$ на интервале $(0; 1)$. Решение: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2(1-x)} = 0$,

$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x^2(1-x)} = 0$. Точки экстремума: $\left(\sqrt[3]{x^2(1-x)}\right)' = \frac{1}{3}(x^2(1-x))^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2(1-x))' =$

$= \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}} (1-x)^{-\frac{2}{3}} (2x(1-x) - x^2) = \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}} (1-x)^{-\frac{2}{3}} (2x - 3x^2)$, т.е. критические

точки $x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$. $f\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ – это наибольшее значение.

Ответ: $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

948. Указание: найдите наибольшее значение функции $f(x) = x(a-2x)^2$ на промежутке $\left[0; \frac{a}{2}\right]$.

949. Указание: найдите наименьшее значение функции $f(x) = (x+a) \cdot \frac{a^2}{2x}$ при $x > 0$.

950. Указание: найдите наибольшее значение функции площади $f(x) = 2x(3-x^2)$ при $x > 0$.

951. Найдите на параболе $y = x^2$ точку, ближайшую к точке А (2; 0,5).

Решение: рассмотрим функцию расстояния от точки А до точки параболы с координатами $(x; x^2)$: $f(x) = \sqrt{(2-x)^2 + (0,5-x^2)^2}$, определенную при всех $x \in \mathbf{R}$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(2-x)^2 + (0,5-x^2)^2}} \cdot (-2(2-x) - 4x(0,5-x^2)) = \frac{2(x^3-1)}{\sqrt{(2-x)^2 + (0,5-x^2)^2}}$$

$f'(x) = 0$ при $x = 1$ – точка минимума.

Т.е. исходная точка имеет координаты (1; 1). Ответ: (1; 1).

952. Указание: найдите наибольшее значение функции $f(\varphi) = a^2 \sin \varphi (1 + \cos \varphi)$ на отрезке $[0; \pi]$ (см. рис. 141).

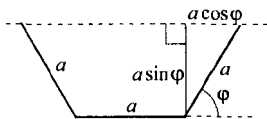


Рис. 141

§53. Выпуклость графика функции, точки перегиба

953. Найти $f''(x)$, если:

1) $f(x) = x^2 \cos x$. Решение: $f'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$. Тогда:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x \cos x - x^2 \sin x)' = 2 \cos x - 2x \sin x - x^2 \cos x - 2x \sin x = \\ &= 2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x. \text{ Ответ: } 2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x. \\ &2) \text{--} 4) \text{ аналогично 1)}. \end{aligned}$$

954. Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз функции $f(x)$.

1) $f(x) = (x+1)^4$. Решение: $f'(x) = 4(x+1)^3$, $f''(x) = 12(x+1)^2$, т.е. $f''(x) \geq 0$ при всех x , т.е. $f(x)$ выпукла вниз при всех $x \in \mathbf{R}$. Ответ: $x \in \mathbf{R}$.

2) Аналогично 1).

3) $f(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot e^x$. Решение: $f'(x) = (2x - 3) \cdot e^x + (x^2 - 3x + 2) \cdot e^x = (x^2 - x - 1) \cdot e^x$, $f''(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x - 1)e^x = (x + 2)(x - 1)e^x$. Т.е. $f''(x) > 0$ при $x > 1$ и $x < -2$; и $f''(x) < 0$ при $-2 < x < 1$.

Ответ: выпукла вниз при $x > 1$ и $x < -2$; и выпукла вверх при $-2 < x < 1$.

4) Указание: $f''(x) = (3x^2 - 6 \ln x - 6)' = 6x - \frac{6}{x}$.

955. Найти точки перегиба функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = \cos x$. Решение: $f''(x) = -\cos x$. Т.е. $f''(x) = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$,

$k \in \mathbf{Z}$. Т.к. в этих точках $f''(x)$ меняет знак, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ – точки пере-

гиба. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

2) Аналогично 3).

3) $f(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$. Решение: $f''(x) = 72x - 48 = 24(3x - 2)$. Т.е. $x = \frac{2}{3}$ – точка перегиба. Ответ: $x = \frac{2}{3}$.

4) Указание: $f''(x) = -\sin x + 2 \sin 2x = 2 \sin x(2 \cos x - 1)$.

Упражнения к главе IX

956. Аналогично задачам 900 и 902.

957. 1) Указание: $y' = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 4x(x^2 - 3x - 4) = 4x(x - 4)(x + 1)$.

2) Указание: $y' = 16x^3 - 4x = 4x(4x^2 - 1) = 4x(2x - 1)(2x + 1)$.

3) Указание: $y' = \frac{1}{3} - \frac{12}{x^2} = \frac{(x - 6)(x + 6)}{3x^2}$.

4) Указание: $y' = -\frac{2}{(x - 3)^2}$.

958. Найти точки экстремума функции:

1) $y = x^3 - 4x^2$. Решение: $y' = 3x^2 - 8x = x(3x - 8)$. $x = 0$ и $x = \frac{8}{3}$ – точки экстремума (т.к. в них производная меняет знак). Ответ: $x = 0$ и $x = \frac{8}{3}$.

2) Аналогично 1).

959. Аналогично задачам 958 и 915.

960. 1) $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2$. Решение: область определения функции $x \in \mathbf{R}$. График

функции пересекает ось OX в точках $x=0$ и $x=-9$.

$y' = x^2 + 6x = x(x+6)$, т.е. $x=0$ и $x=-6$ – точки экстремума. Строим таблицу (см. табл. 9).

Таблица 9

x	$x < -6$	$x = -6$	$-6 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	36 (max)	↘	0 (min)	↗

Эскиз графика см. на рис. 142.

2) Аналогично 1).

961. Аналогично задаче 928.

962. Найти наибольшее и наименьшее значение функции.

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ на отрезке $[-2; 2]$. Решение:

$f(-2) = -23$, $f(2) = -7$. Найдем значение в экстремальных точках:

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$, $f(0) = 9$. Ответ: -23 и 9 .

2)–4) Аналогично 1).

963. Указание: пусть периметр имеет длину $2p$, тогда по теореме Пифагора

$d_x = \sqrt{x^2 + (p-x)^2}$, где x – длина одной стороны. Найдите наименьшее $d(x)$, $x \in [0; p]$.

964. Из всех равнобедренных треугольников с периметром p найти треугольник с наибольшей площадью.

Решение: пусть x – длина боковой стороны, тогда основание имеет длину $p-2x$. Длина высоты, опущенной на основание равна

$\sqrt{x^2 - \left(\frac{p-2x}{2}\right)^2} = \sqrt{px - \frac{p^2}{4}}$. Тогда площадь треугольника равна

$S(x) = \frac{1}{2}(p-2x)\sqrt{px - \frac{p^2}{4}}$. Найдем максимум $S(x)$ при $x \in \left[0; \frac{p}{2}\right]$.

$S(0) = 0$, $S\left(\frac{p}{2}\right) = 0$.

$$S'(x) = -\sqrt{px - \frac{p^2}{4}} + \frac{1}{2}(p-2x) \frac{p}{2\sqrt{px - \frac{p^2}{4}}} = \frac{-4\left(px - \frac{p^2}{4}\right) + p(p-2x)}{4\sqrt{px - \frac{p^2}{4}}} =$$

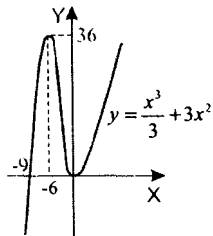


Рис. 142

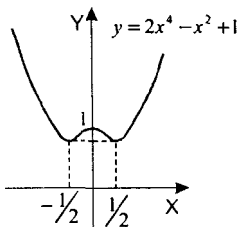


Рис. 143

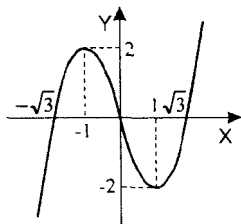


Рис. 144

$= \frac{p^2 - 3px}{2\sqrt{px - \frac{p^2}{4}}}$, т.е. $S'(x) = 0$ при $x = \frac{p}{3}$ – это точка максимума, т.е.

наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Ответ: равносторонний треугольник.

965. Аналогично задаче 964.

Проверь себя!

1. Аналогично задачам 900 и 902.
2. Аналогично задаче 958.
3. 1) См. рис. 143; 2) См. рис. 144.
4. Аналогично задаче 962.
5. Аналогично задаче 964.

966. Доказать, что функция $y = 1,8x^5 - 2\frac{1}{3}x^3 + 7x + 12,5$ возрастает на всей области определения.

Решение: Найдем производную $y' = 9x^4 - 2x^2 + 7 = 9u^2 - 2u + 7$, где $u = x^2$. Но $9u^2 - 2u + 7 > 0$ при всех u , т.к. $D < 0$. Т.е. $y' > 0$ при всех x , следовательно функция возрастает при всех x , ч.г.д.

967. Аналогично задаче 966.

968. 1) Указание: $y' = \ln x + 1$.

2) Указание: $y' = xe^x + e^x = e^x(x+1)$.

3) Указание: $y' = \frac{25}{(7-x)^2} - \frac{9}{(3-x)^2} = \frac{8(2x-9)(x+3)}{(7-x)^2(3-x)^2}$.

969. Указание: $f(x)$ возрастает на промежутках, где $g(x) > 0$, убывает на промежутках, где $g(x) < 0$. Точки экстремума функции $f(x)$ – нули функции $g(x)$ (т.к. в этих точках функция $g(x)$ меняет знак). Точки перегиба функции $f(x)$ соответствуют экстремумам функции $g(x)$.

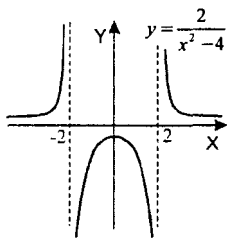


Рис. 145

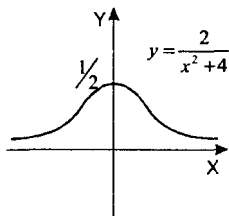


Рис. 146

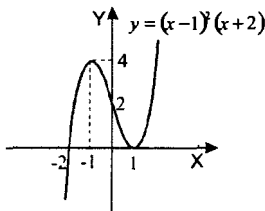


Рис. 147

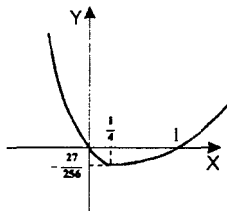


Рис. 148

970. 1) $y = \frac{2}{x^2 - 4}$. Решение: О.О.Ф. $x \neq \pm 2$. $y' = -\frac{4x}{(x^2 - 4)^2}$, т.е. $x_0 = 0$ –

точка максимума, $f(0) = -\frac{1}{2}$. Эскиз графика – рис. 145.

2) Аналогично 1). См. рис. 146.

3) Указание: $y' = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = 3(x-1)(x+1)$, точка $x_0 = 1$ – точка минимума, $x_0 = -1$ – точка максимума. См. рис. 147.

4) Указание: $y' = 3x(x-1)^2 + (x-1)^3 = (x-1)^2(4x-1)$, точка $x_0 = \frac{1}{4}$ – точка минимума. См. рис. 148.

971. Аналогично задаче 938.

972. Указание: скорость тела $v(t) = S'(t) = 12t - 3t^2$. Найдите наибольшее значение этой функции при $t \geq 0$.

973. Указание: пусть длина катета x , тогда длина другого катета равна

$$\sqrt{(l-x)^2 - x^2} = \sqrt{l^2 - 2lx}, \text{ а площадь треугольника } S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{l^2 - 2lx}.$$

Найдите наибольшее значение функции $S(x)$ на промежутке $\left[0; \frac{l}{2}\right]$.

974. Указание: найдите наибольшее значение $S(x) = \frac{(40-x) \cdot x}{2}$ на $[0; 40]$.

975. Сумма диагоналей параллелограмма равна a . Найти наименьшее значение суммы квадратов всех его сторон.

Решение: известно, что сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей. Т.е. необходимо найти наименьшее значение функции

$$f(x) = x^2 + (a-x)^2 \text{ на отрезке } [0; a]. \quad f'(x) = 2x - 2(a-x) = 4x - 2a.$$

$$f(0) = a^2, \quad f(a) = a^2, \quad f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}, \text{ т.е. наименьшее значение}$$

$$\frac{a^2}{2}. \text{ Ответ: } \frac{a^2}{2}.$$

976. Указание: найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$ на отрезке $[0; R]$.

977. Указание: наибольший объем имеет пирамида, в основании которой лежит треугольник наибольшей площади. См. задачу 973.

978. Указание: объем цилиндра равен $V(x) = \pi x^2 \left(\frac{p}{2} - 2x \right)$. Найдите наибольшее значение этой функции на отрезке $\left[0; \frac{p}{4} \right]$.

979. Аналогично задаче 948.

980. Найти точки экстремума функции $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$. Решение:

$$y' = \frac{(2x-3)(x^2+3x+2) - (2x+3)(x^2-3x+2)}{(x^2+3x+2)^2} = \frac{6(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+2)^2(x+1)^2}. \quad y' = 0$$

при $x = \pm\sqrt{2}$. В этих точках производная меняет знак, т.е. это точки экстремума. Ответ: $x = \pm\sqrt{2}$.

981. 1) $y = (x^2 - 1)\sqrt{x+1}$. Решение: О.О.Ф.: $x \geq -1$. Функция обращается в

$$\begin{aligned} \text{нуль при } x = \pm 1. \text{ Найдём производную: } y' &= 2x\sqrt{x+1} + \frac{x^2-1}{2\sqrt{x+1}} = \\ &= 2x\sqrt{x+1} + \frac{x^2-1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{4x(x+1) + x^2-1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{5x^2+4x-1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{(5x-1)(x+1)}{2\sqrt{x+1}}. \text{ Т.е.} \end{aligned}$$

$y' = 0$ при $x = \frac{1}{5}$ – это точка минимума. Эскиз графика на рис. 149.

2) $y = |x| \cdot \sqrt[3]{1+3x}$. Решение: область определения функции $x \in \mathbb{R}$. Функция обращается в нуль при $x = 0$ и $x = -\frac{1}{3}$. Найдём производную:

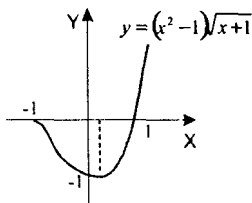


Рис. 149

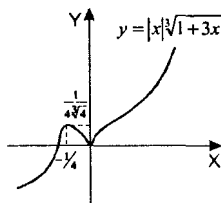


Рис. 150

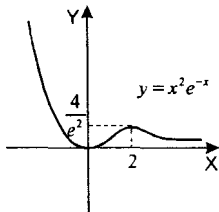


Рис. 151

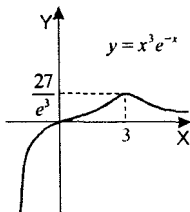


Рис. 152

$$y' = \begin{cases} -x\sqrt{1+3x}, & x < 0 \\ x\sqrt{1+3x}, & x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{1+3x} - \frac{x}{\sqrt{(1+3x)^2}}, & x < 0 \\ \sqrt{1+3x} + \frac{x}{\sqrt{(1+3x)^2}}, & x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1+4x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}, & x < 0 \\ \frac{1+4x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Таким образом, $y' = 0$ при $x = -\frac{1}{4}$ – это точка максимума (производная

меняет знак). $y(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}}$. Эскиз графика на рис. 150.

3) Указание: $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$. Откуда $x = 0$ – точка минимума, а $x = 2$ – точка максимума. См. рис. 151.

4) Указание: $y' = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = x^2e^{-x}(3-x)$. Точка $x = 0$ не является точкой экстремума, а $x = 3$ – точка максимума. См. рис. 152.

982. Указание: для того, чтобы сдвинуть груз, необходимо, чтобы

$$k(mg - F \sin \alpha) = F \cos \alpha, \text{ т.е. } kmg = F(\cos \alpha + k \sin \alpha), F(\alpha) = \frac{kmg}{\cos \alpha + k \sin \alpha}.$$

Найдите наименьшее значение этой функции на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Глава X

Интеграл

§54. Первообразная

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

983. 1) $F(x) = \frac{x^6}{6}$; $f(x) = x^5$. Решение: $F'(x) = \frac{6x^5}{6} = x^5 = f(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$

2) $F(x) = \frac{x^5}{5}$; $f(x) = x^4$. Решение: $F'(x) = \frac{5x^4}{5} = x^4 = f(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$

984. 1) $F(x) = \frac{2}{x}$; $f(x) = -\frac{2}{x^2}$. Решение: $F'(x) = (2x^{-1})' = -\frac{2}{x^2} = f(x)$ для $x > 0$

2) $F(x) = 1 + \sqrt{x}$; $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Решение: $F'(x) = \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$

для всех $x > 0$.

985. 1) x^4 . Решение: подберем функцию $F(x)$ так, чтобы $F'(x) = x^4$. Тогда все первообразные функции x^4 имеют вид $F(x) + C$, где C – любое действительное число. Например, $F(x) = \frac{x^5}{5}$. Ответ: $\frac{x^5}{5} + C, C \in \mathbf{R}$.

2) x^3 . $F(x) = \frac{x^4}{4} + C, C \in \mathbf{R}$.

3) x^{-3} . $F(x) = \frac{-x^{-2}}{2} + C, C \in \mathbf{R}$.

4) $x^{-\frac{1}{2}}$. $F(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + C, C \in \mathbf{R}$.

986. 1) $f(x) = x, M(-1; 3)$. Решение: найдем первообразные функции $f(x)$:

$$f(x) = x = \left(\frac{x^2}{2}\right)', \text{ т.е. } F(x) = \frac{x^2}{2} + C. \text{ Тогда } F(-1) = \frac{(-1)^2}{2} + C = 3,$$

$$C = 2,5. \text{ Ответ: } F(x) = \frac{x^2}{2} + 2,5.$$

2) $f(x) = \sqrt{x}$, $M(9; 10)$. Решение: найдем первообразные функции $f(x)$:

$$\sqrt{x} = \left(\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right)', \text{ т.е. } F(x) = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C. \text{ Тогда } F(9) = 10, \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 3 + C = 10,$$

$$C = -8. \text{ Ответ: } F(x) = \frac{2}{3} x \sqrt{x} - 8.$$

987. 1) $F(x) = 3e^{\frac{x}{3}}$; $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$. Решение: $F'(x) = \left(3e^{\frac{x}{3}} \right)' = 3 \cdot \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}} = e^{\frac{x}{3}} = f(x)$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

2) $F(x) = \sin 2x$; $f(x) = 2 \cos 2x$. Решение: $F'(x) = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x = f(x)$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

§55. Правила нахождения первообразных

988. 1) $2x^5 - 3x^2$. Решение: по таблице одна из первообразных от x^5 равна

$$\frac{x^6}{6}, \text{ от } x^2 \text{ равна } \frac{x^3}{3}, \text{ тогда } F(x) = 2 \cdot \frac{x^6}{6} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x^6}{3} - x^3.$$

Ответ: $F(x) = \frac{x^6}{3} - x^3$.

2) $5x^4 + 2x^3$. $F(x) = \frac{5x^5}{5} + \frac{2x^4}{4} = x^5 + \frac{x^4}{2}$. Ответ: $F(x) = x^5 + \frac{x^4}{2}$.

3) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$. $F(x) = 2 \ln x + 3(-x^{-1}) = 2 \ln x - 3x^{-1}$. Ответ: $F(x) = 2 \ln x + x^3$.

4) $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$. $F(x) = 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} - 3 \ln x = -\frac{1}{x^2} - 3 \ln x$. Ответ: $F(x) = -\frac{1}{x^2} - 3 \ln x$.

5) $6x^2 - 4x + 3$. $F(x) = 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \frac{x^1}{1} = 2x^3 - 2x^2 + 3x$.

Ответ: $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x$.

6) $4\sqrt[4]{x} - 6\sqrt{x}$. $F(x) = 4 \cdot \frac{3 \cdot x^{\frac{4}{3}}}{4} - 6 \cdot \frac{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}{3} = 3x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{3}{2}}$. Ответ: $F(x) = 3x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{3}{2}}$

989. 1) $3 \cos x - 4 \sin x$. $F(x) = 3 \sin x - 4(-\cos x) = 3 \sin x + 4 \cos x$.

2) $5 \sin x + 2 \cos x$. $F(x) = -5 \cos x + 2 \sin x$.

3) $e^x - 2 \cos x$. $F(x) = e^x - 2 \sin x$.

4) $3e^x - \sin x$. $F(x) = 3e^x + \cos x$.

5) $5 - e^{-x} + 3 \cos x$. $F(x) = 5x + e^{-x} + 3 \sin x$.

6) $1 + 3e^x - 4 \cos x$. $F(x) = x + 3e^x - 4 \sin x$.

7) $6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x$. Т.к. $6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x = 6x^{1/3} - \frac{2}{x} + 3 \cdot e^x$, то первообразная

$$F(x) = \frac{3}{4} \cdot 6x^{4/3} - 2 \ln x + 3e^x$$
. Ответ: $F(x) = 4,5\sqrt{x^4} - 2 \ln x + 3e^x$.

8) $\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - 2e^{-x}$. Т.к. $\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - 2e^{-x} = 4x^{-1/2} + 3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot e^{-x}$, то первооб-

разная $F(x) = 8\sqrt{x} + 3 \ln x + 2e^{-x}$. Ответ: $F(x) = 8\sqrt{x} + 3 \ln x + 2e^{-x}$.

990. 1) $(x+1)^4$. $F(x) = \frac{(x+1)^5}{5}$. 2) $(x-2)^4$. $F(x) = \frac{(x-2)^5}{5}$.

3) $\frac{2}{\sqrt{x-2}}$. $F(x) = 2 \cdot \frac{(x-2)^{3/2}}{3/2} = 4\sqrt{x-2}$.

4) $\frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$. $F(x) = 3(x+3)^{2/3}$. $F(x) = \frac{9}{2} \sqrt[3]{(x+3)^2}$.

5) $\frac{1}{x-1} + 4 \cos(x+2)$. $F(x) = \ln|x-1| + 4 \sin(x+2)$.

6) $\frac{3}{x-3} - 2 \sin(x-1)$. $F(x) = 3 \ln|x-3| + 2 \cos(x-1)$.

991. 1) $\sin(2x+3)$. $F(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x+3) + C$.

2) $\cos(3x+4)$. $F(x) = \frac{1}{3} \sin(3x+4) + C$.

3) $\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)$. $F(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}-1\right) + C$.

4) $\sin\left(\frac{x}{4}+5\right)$. $F(x) = -4 \cos\left(\frac{x}{4}+5\right) + C$.

5) $e^{\frac{x+1}{2}}$. $F(x) = 2e^{\frac{x+1}{2}} + C$.

6) e^{3x-5} . $F(x) = \frac{1}{3} e^{3x-5} + C$.

7) $\frac{1}{2x}$. $F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x| + C$.

8) $\frac{1}{3x-1}$. $F(x) = \frac{1}{3} \ln|3x-1| + C$.

992. 1) $f(x) = 2x + 3$, $M(1; 2)$. Решение: общий вид первообразных функции

$$f(x): F(x) = x^2 + 3x + C. \text{ Тогда } F(1) = 1 + 3 + C = 2, \text{ откуда } C = -2.$$

$$\text{Ответ: } F(x) = x^2 + 3x - 2.$$

2) $f(x) = 4x - 1$, $M(-1; 3)$. Решение: общий вид первообразных функции

$$f(x): F(x) = 2x^2 - x + C. \text{ Тогда } F(-1) = 2 + 1 + C = 3, \text{ откуда } C = 0.$$

$$\text{Ответ: } F(x) = 2x^2 - x.$$

3) $f(x) = \sin 2x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 5\right)$. Решение: общий вид первообразных функции

$$f(x): F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C, \text{ тогда } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cos \pi + C = 5, \text{ откуда}$$

$$C = 4,5. \text{ Ответ: } F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + 4,5.$$

4) $f(x) = \cos 3x$, $M(0; 0)$. Решение: общий вид первообразных функции

$$f(x): F(x) = \frac{1}{3} \sin 3x + C, \text{ тогда } F(0) = \frac{1}{3} \sin 0 + C = 0, \text{ откуда } C = 0.$$

$$\text{Ответ: } F(x) = \frac{1}{3} \sin 3x.$$

993. 1) $e^{2x} - \cos 3x$. $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{3} \sin 3x$.

$$2) e^{\frac{x}{4}} + \sin 2x. F(x) = 4e^{\frac{x}{4}} - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

$$3) 2 \sin \frac{x}{5} - 5e^{2x + \frac{1}{3}}. F(x) = -10 \cos \frac{x}{5} - \frac{5}{2} e^{2x + \frac{1}{3}}.$$

$$4) 3 \cos \frac{x}{7} + 2e^{3x - \frac{1}{2}}. F(x) = 21 \sin \frac{x}{7} + \frac{2}{3} e^{3x - \frac{1}{2}}.$$

$$5) \text{ Указание: } \sqrt{\frac{x}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot x^{1/2}.$$

$$6) \text{ Указание: } \frac{4}{\sqrt{3x+1}} = 4 \cdot (3x+1)^{-1/2}.$$

994. $\frac{2x^4 - 4x^3 + x}{3}$. Решение: $f(x) = \frac{2x^4 - 4x^3 + x}{3} = \frac{2}{3} \cdot x^4 - \frac{4}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{3} x$, тог-

$$\text{да } F(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2}. \text{ Ответ: } \frac{2}{15} x^5 - \frac{1}{3} x^4 + \frac{1}{6} x^2.$$

2) $\frac{6x^3 - 3x + 2}{5}$. Решение: $f(x) = \frac{6}{5} \cdot x^3 - \frac{3}{5} \cdot x + \frac{2}{5}$, тогда одна из первообразных

разных $F(x) = \frac{6}{5} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{3}{5} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{2}{5} \cdot x$. Ответ: $F(x) = 0,3x^4 - 0,3x^2 + 0,4x$.

3) $(1 + 2x)(x - 3)$. Решение: $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$, тогда одна из первообразных

ных $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x$. Ответ: $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x$.

4) $(2x - 3)(2 + 3x)$. Решение: $f(x) = 6x^2 - 5x - 6$, тогда одна из первообразных

разных $F(x) = \frac{6}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x$. Ответ: $F(x) = \frac{6}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x$.

995. 1) $(2x + 1)\sqrt{x}$. Решение: $f(x) = 2x^{3/2} + x^{1/2}$, тогда одна из первообразных

$F(x) = \frac{2x^{5/2}}{2/5} + \frac{x^{3/2}}{3/2} = \left(\frac{4}{5}x^2 + \frac{2}{3}x\right)\sqrt{x}$. Ответ: $F(x) = \left(4x^2 + \frac{2}{3}x\right)\sqrt{x}$.

2) $(3x - 2)\sqrt[4]{x}$. Решение: $f(x) = 3x^{5/4} - 2x^{1/4}$, тогда одна из первообразных

$F(x) = \frac{3 \cdot 3x^{9/4}}{7} - \frac{2 \cdot 3x^{5/4}}{4} = \frac{9}{7}x^{9/4} - \frac{3}{2}x^{5/4}$. Ответ: $f(x) = \frac{9}{7}x^{9/4} - \frac{3}{2}x^{5/4}$.

3) $\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}$. Решение: $f(x) = \frac{x+4}{\sqrt[3]{x}} = x^{2/3} + 4x^{-1/3}$, тогда одна из первообразных

ных $F(x) = \frac{3}{5}x^{5/3} + 4 \cdot \frac{3}{2}x^{2/3} = \frac{3}{5}x^{5/3} + 6x^{2/3}$. Ответ: $F(x) = \frac{3}{5}x^{5/3} + 6x^{2/3}$.

4) $\frac{x-3}{\sqrt{x}}$. Решение: $f(x) = x^{1/2} - 3x^{-1/2}$, тогда одна из первообразных

$F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} - 3 \cdot \frac{2}{1}x^{1/2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 6\sqrt{x}$. Ответ: $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 6\sqrt{x}$.

996. 1) Указание: $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

2) Указание: $\sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x = \sin(x - 3x) = -\sin 2x$.

997. Найти первообразную функции $y = 2 \sin 5x + 3 \cos \frac{x}{2}$, которая при

$x = \frac{\pi}{3}$ принимает значение, равное 0.

Решение: найдем первообразную: $F(x) = -\frac{2}{5} \cos 5x + 6 \sin \frac{x}{2} + C$. Тогда

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \text{ т.е. } -\frac{2}{5} \cos \frac{5\pi}{3} + 6 \sin \frac{\pi}{6} + C = 0, \frac{1}{5} + 3 + C = 0, C = -3,2.$$

Ответ: $-\frac{2}{5} \cos 5x + 6 \sin \frac{x}{2} + -3,2$.

998. 1) Указание: $\frac{x}{x-3} = \frac{x-3+3}{x-3} = 1 + \frac{3}{x-3} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{x-3}$.

2) Указание: $\frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x+2}$ при $x \neq 1$.

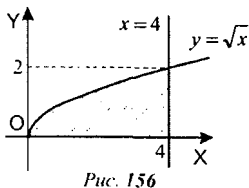
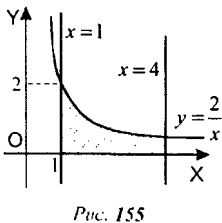
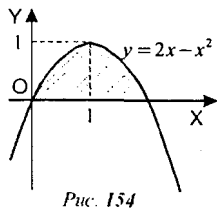
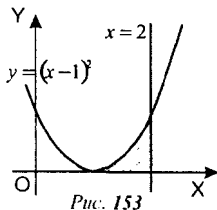
3) Указание: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$.

4) Указание: $\sin 3x \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin(3x+5x) + \sin(3x-5x)) = \frac{1}{2} \sin 8x - \frac{1}{2} \sin 2x$.

§56. Площадь криволинейной трапеции и интеграл

$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b)$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

999. 1) См. рис. 153; 2) См. рис. 154; 3) См. рис. 155; 4) См. рис. 156.



1000. 1) $a = 2, b = 4, f(x) = x^3$. Решение: искомая площадь трапеции равна

$$S = \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 x^3 dx. \text{ Первообразная функции } f(x) = x^3 \quad F(x) = \frac{x^4}{4} + C,$$

откуда $S = F(4) - F(2) = 64 - 4 = 60$. Ответ: $S = 60$.

2) $a = 3, b = 4, f(x) = x^2$. Решение: $S = \int_3^4 x^2 dx = F(4) - F(3) = \frac{4^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{37}{3}$.

Ответ: $S = 12\frac{1}{3}$.

3) $a = -2, b = 1, f(x) = x^2 + 1$. Т.к. первообразная функции $f(x)$ равна

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x, \text{ то площадь } S = \int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x \right) \Big|_{-2}^1 = 6. \text{ Ответ: } S = 6.$$

4) $a = 0, b = 2, f(x) = x^3 + 1$. Решение: $S = \int_0^2 (x^3 + 1) dx$, первообразная функции $f(x)$: $F(x) = \frac{x^4}{4} + x$, тогда $S = F(2) - F(0) = 6 - 0 = 6$. Ответ: 6.

5) $a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{2\pi}{3}, f(x) = \sin x$. Решение: $S = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin x dx$, первообразная

$$F(x) = -\cos x, \text{ тогда } S = \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \text{ Ответ: } 1.$$

6) Аналогично 5).

1001. 1) $y = 4 - x^2$. Решение: найдем точки пересечения параболы с осью

ОХ: $4 - x^2 = 0$, откуда $x = \pm 2$. Тогда $S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$. Первообразная функции

равна $4x - \frac{x^3}{3}$, откуда $S = 4 \cdot 2 - \frac{8}{3} - 4 \cdot (-2) + \frac{(-2)^3}{3} = 10\frac{2}{3}$. Ответ: $10\frac{2}{3}$.

2), 3) аналогично 1).

1002. 1) Указание: аналогично задаче 1000. $S = \int_1^8 x^{1/3} dx, F(x) = \frac{3}{4} x^{4/3} + C$.

2) Указание: аналогично задаче 1000. $S = \int_4^9 x^{1/2} dx, F(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$.

1003. 1) $b = 2, f(x) = 5x - x^2$. Решение: см. рис. 157. Искомая площадь

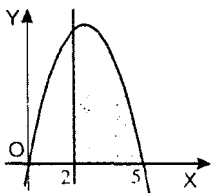


Рис. 157

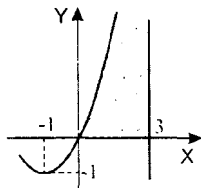


Рис. 158

$S = \int_2^5 (5x - x^2) dx$. Т.к. первообразная равна $F(x) = \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$, находим площадь фигуры: $S = F(5) - F(2) = \frac{125}{2} - \frac{125}{3} - 10 + \frac{8}{3} = 13,5$. Ответ: 13,5.

2) Указание: аналогично 1), $S = \int_0^3 (x^2 + 2x) dx$, см. рис. 158.

3) $b = 1$, $f(x) = e^x - 1$. Решение: найдем точку пересечения графика с осью OX : $e^x - 1 = 0$, откуда $x = 0$. Тогда $S = \int_0^1 (e^x - 1) dx$. Первообразная равна $F(x) = e^x - x$, тогда $S = F(1) - F(0) = e - 1 - 1 + 0 = e - 2$. Ответ: $e - 2$.

4) Указание: аналогично 3). $S = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$, $F(x) = x - \ln|x| + C$.

§57. Вычисление интегралов

1004. 1) $\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$;

2) $\int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{27}{3} - 0 = 9$;

3) $\int_{-1}^2 3x^2 dx = x^3 \Big|_{-1}^2 = 8 - (-1) = 9$;

4) $\int_{-2}^3 2x dx = x^2 \Big|_{-2}^3 = 9 - 4 = 5$;

5) $\int_2^3 \frac{1}{x^2} dx = -x^{-1} \Big|_2^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;

6) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2} x^{-2} \Big|_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$;

7) $\int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$;

8) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2x^{1/2} \Big|_4^9 = 2(3 - 2) = 2$.

1005. 1) $\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$;

2) $\int_0^{\ln 2} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 1$;

$$3) \int_{-\pi}^{2\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\pi}^{2\pi} = 0 - 0 = 0; \quad 4) \int_{-2\pi}^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{-2\pi}^{\pi} = 1 + 1 = 2;$$

$$5) \int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{-2\pi}^{\pi} = -\frac{1}{2} (\cos 2\pi - \cos(-4\pi)) = -\frac{1}{2} (1 - 1) = 0;$$

$$6) \int_{-3\pi}^0 \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_{-3\pi}^0 = \frac{1}{3} \sin 0 - \frac{1}{3} \sin(-9\pi) = 0 - \frac{1}{3} \sin \pi = 0 - 0 = 0.$$

$$1006. 1) \int_{-3}^2 (2x-3) dx = (x^2 - 3x) \Big|_{-3}^2 = 4 - 6 - 9 - 9 = -20;$$

$$2) \int_2^{-1} (5-4x) dx = 5x - 2x^2 \Big|_{-2}^{-1} = -5 - 2 - (-10 - 8) = 11;$$

$$3) \int_{-1}^2 (1-3x^2) dx = (x - x^3) \Big|_{-1}^2 = 2 - 8 + 1 + (-1)^3 = -6;$$

$$4) \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = 2\frac{2}{3};$$

$$5) \int_0^2 (3x^2 - 4x + 5) dx = x^3 - 2x^2 + 5x \Big|_0^2 = 8 - 8 + 10 - 0 = 10.$$

$$1007. 1) \text{ Указание: } \int_0^4 (x - 3\sqrt{x}) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x^{3/2} \right) \Big|_0^4.$$

$$2) \text{ Указание: } \int_1^9 \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = (x^2 - 6\sqrt{x}) \Big|_1^9.$$

$$3) \text{ Указание: } \int_0^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_0^2.$$

$$4) \text{ Указание: } \int_1^3 2e^{2x} dx = e^{2x} \Big|_1^3.$$

$$1008. 1) \int_{-2}^1 x(x+3)(2x-1) dx = \int_{-2}^1 (2x^3 + 5x^2 - 3x) dx = \left(\frac{1}{2} x^4 + \frac{5}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 \right) \Big|_{-2}^1 =$$

$$= 8 + \frac{40}{3} + 6 + \frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = 12.$$

$$2) \int_{-1}^0 (x+1)(x^2-2) dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x \right) \Big|_{-1}^0 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 1 + 2 \right) = -\frac{11}{12};$$

$$3) \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx = \int_1^2 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2 + 1 = \frac{31}{6};$$

$$4) \int_{-2}^{-1} 4 \left(1 - \frac{2}{x} \right) dx = \int_{-2}^{-1} (4x^{-2} - 8x^{-3}) dx = \left(-\frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \Big|_{-2}^{-1} = 4 + 4 - (2 + 1) = 5.$$

1009. 1) Указание: $\int_1^2 \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_1^2 (5x^{2/3} - 2x^{-1/3}) dx = \left(3x^{5/3} - 3x^{2/3} \right) \Big|_1^2$.

2) Указание: $\int_1^3 \frac{3x-1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^3 (3x^{1/2} - x^{-1/2}) dx = \left(2x^{3/2} - 2x^{1/2} \right) \Big|_1^3$.

3) Указание: $\int_2^7 \frac{4}{\sqrt{x+2}} dx = \int_2^7 4(x+2)^{-1/2} dx = 8(x+2)^{1/2} \Big|_2^7$.

1010. 1) $\int_1^2 \frac{3}{2x-1} dx = \frac{3}{2} \ln|2x-1| \Big|_1^2 = \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 1 = \frac{3}{2} \ln 3;$

2) $\int_0^1 \frac{4}{3x+2} dx = \frac{4}{3} \ln|3x+2| \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \ln 5 - \frac{4}{3} \ln 2 = \frac{4}{3} \ln 2,5;$

3) $\int_0^{\pi/2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) dx = -\frac{1}{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$

1011. 1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi;$

2) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$

3) $\int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$

4) $\int_0^{\pi} (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$. Решение: преобразуем подинтегральное выраже-

ние: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x =$

$$= 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x. \text{ Т.с. } \int_0^{\pi} (\sin^4 x + \cos^4 x) dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \right) dx =$$

$$= \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{16} \sin 4\pi - \frac{1}{16} \sin 0 = \frac{3\pi}{4}.$$

$$5) \int_0^3 x^2 \sqrt{x+1} dx = \int_0^3 ((x+1)^2 \sqrt{x+1} - 2(x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}) dx =$$

$$= \int_0^3 ((x+1)^{5/2} - 2(x+1)^{3/2} + (x+1)^{1/2}) dx = \left(\frac{2}{7}(x+1)^{7/2} - \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \right) \Big|_0^3 =$$

$$= \frac{2}{7} \cdot 2^7 - \frac{4}{5} \cdot 2^5 + \frac{2}{3} \cdot 2^3 - \left(\frac{2}{7} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \right) = 16 \frac{16}{105}.$$

$$6) \int_3^4 \frac{x^2 - 4x + 5}{x-2} dx = \int_3^4 \frac{(x-2)^2 + 1}{x-2} dx = \int_3^4 \left(x-2 + \frac{1}{x-2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x-2| \right) \Big|_3^4 = 8 - 8 + \ln 2 - \frac{9}{2} + 6 - \ln 1 = \ln 2 + 1,5.$$

1012. Найти все числа $b > 1$, для которых выполняется равенство

$$\int_1^b (b-4x) dx \geq 6-5b. \text{ Решение: } \int_1^b (b-4x) dx = (bx-2x^2) \Big|_1^b = -b^2 - b + 2. \text{ Та-}$$

ким образом нужно решить систему неравенств:

$$\begin{cases} b > 1 \\ -b^2 - b + 2 \geq 6 - 5b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 1 \\ b^2 - 4b + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 1 \\ (b-2)^2 \leq 0 \end{cases}, \text{ откуда } b = 2.$$

Ответ: $b = 2$.

§58. Вычисление площадей с помощью интегралов

1013. а) Указание: $S = \int_{-1}^1 (x^2 + 4) dx$.

б) Указание: $S = \int_0^1 (\sqrt{x} + 1) dx$.

в) Указание: $S = \int_1^4 \frac{2}{x} dx$.

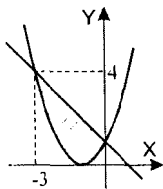


Рис. 159

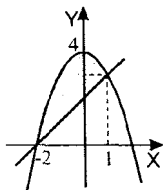


Рис. 160

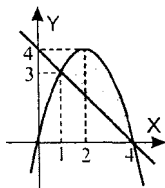


Рис. 161

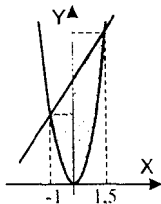


Рис. 162

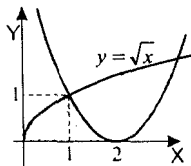


Рис. 163

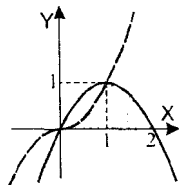


Рис. 164

1014. 1) Решение: из рис. 159 следует, что искомая площадь равна

$$\int_{-3}^0 (1-x) dx - \int_{-3}^0 (1+x)^2 dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-3}^0 - \frac{(1+x)^3}{3} \Big|_{-3}^0 = 3 + \frac{9}{2} - \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = 4,5. \text{ Ответ: } 4,5.$$

2) Указание: $S = \int_{-2}^1 (4-x^2) dx - \int_{-2}^1 (x+2) dx$, см. рис. 160.

3) Указание: $S = \int_1^4 (4x-x^2) dx - \int_1^4 (4-x) dx$, см. рис. 161.

4) Указание: $S = \int_{-1}^{1,5} 3x^2 dx - \int_{-1}^{1,5} (1,5x+4,5) dx$, см. рис. 162.

1015. 1) Решение: из рис. 163 следует, что искомая площадь равна

$$S = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 + \frac{(x-2)^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1. \text{ Ответ: } 1.$$

2) Указание: $S = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2x-x^2) dx$, см. рис. 164.

1016. 1) Решение: найдем точки пересечения графика параболы и оси OX:

$x^2 + 3x = 0$, откуда $x = 0$ и $x = -3$. Тогда искомая площадь равна:

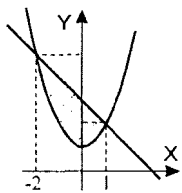


Рис. 165

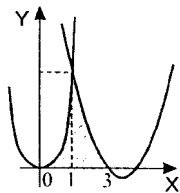


Рис. 166

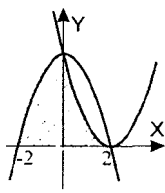


Рис. 167

$$S = \left| \int_{-3}^0 (x^2 + 3x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_{-3}^0 \right| = \left| 9 - \frac{27}{2} \right| = 4,5. \text{ Ответ: } 4,5.$$

2) Аналогично 1).

1017. 1) Решение: См. рис. 165, тогда искомая площадь равна:

$$S = \int_{-2}^1 (3-x) dx - \int_{-2}^1 (x^2+1) dx = \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 - \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-2}^1 = 3 - \frac{1}{2} + 8 - \frac{1}{3} - 3 - \frac{8}{3} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

2), 3) аналогично 1).

1018. 1) Указание: см. рис. 166. Координаты точки пересечения графиков

$$(1; 6), \text{ таким образом, искомая площадь } S = \int_0^1 6x^2 dx + \int_1^3 (x-3)(x-4) dx.$$

$$2) \text{ Указание: см. рис. 167. } S = \int_{-2}^0 (4-x^2) dx + \int_0^2 (x-2)^2 dx.$$

1019. 1) Указание: уравнение прямой $y = \frac{2}{\pi}x$. Аналогично задачам 1014–1018.

$$2) \text{ Указание: см. рис. 168. } S = \int_0^{\pi/4} \sin x dx - \int_0^{\pi/4} \cos x dx.$$

1020. 1) Указание: из уравнения $6x - x^2 = x + 4$ находим точки пересечения:

$$x_0 = 1 \text{ и } x_0 = 4. \text{ См. рис. 169. } S = \int_{-2}^1 (6x - x^2) dx - \int_1^4 (4+x) dx + \int_4^6 (6x - x^2) dx.$$

$$2) \text{ Указание: см. рис. 170. } S = \int_{-2}^1 (4-x^2) dx - \int_1^2 (x+2) dx.$$

1021. 1) Аналогично задачам 1019–1020.

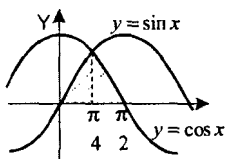


Рис. 168

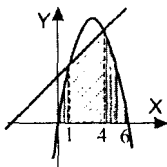


Рис. 169

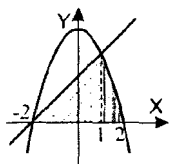


Рис. 170

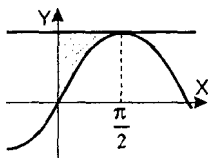


Рис. 171

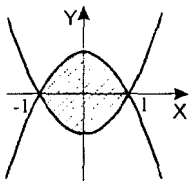


Рис. 172

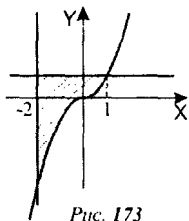


Рис. 173

2) Прямой $y = 1$, осью OY и графиком функции $y = \sin x$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение: из рис. 171 следует, что искомая площадь равна

$$S = \int_0^{\pi/2} 1 dx - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1. \text{ Ответ: } \frac{\pi}{2} - 1.$$

1022. 1) Указание: ур-ние прямой $y = 3x - 3$. Аналогично задачам 1014–1021.

2) Аналогично задаче 1021 п.2).

3) Указание: см. рис. 172. $S = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx - \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx$.

4) Указание: см. рис. 173. $S = \int_{-2}^1 1 dx - \int_{-2}^1 x^3 dx$.

1023. 1) Решение: пусть точка касания имеет координаты $(x_0; x_0^2 + 10)$, тогда

уравнение касательной в этой точке $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 + 10$, т.е.

$y = 2x_0 \cdot x + (10 - x_0^2)$. Т.к. точка с координатами $(0; 1)$ принадлежит касательной, то $1 = 10 - x_0^2$, откуда $x_0 = \pm 3$. Т.е. касательные: $y = -6x + 1$ и

$y = 6x + 1$. Из рис. 174 следует, что искомая площадь равна

Из рис. 174 следует, что искомая площадь равна

$$S = \int_{-3}^3 (x^2 + 10) dx - \int_{-3}^0 (-6x + 1) dx - \int_0^3 (6x + 1) dx =$$

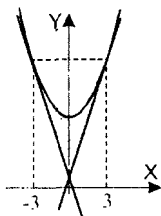


Рис. 174

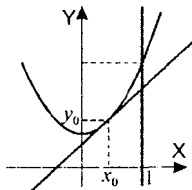


Рис. 175

$$= \left(\frac{x^3}{3} + 10x \right) \Big|_3^3 + (3x^2 - x) \Big|_{-3}^0 - (3x^2 + x) \Big|_0^3 = 9 + 30 + 9 + 30 - 27 - 3 - 27 - 3 = 18.$$

Ответ: 18.

2) Аналогично 1).

1024. Фигура ограничена линиями $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Найти точку

$(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2 + 1$, через которую нужно провести касательную к этому графику так, чтобы она отсекала от фигуры трапецию наибольшей площади.

Решение: общий вид уравнения касательной к графику $f(x) = x^2 + 1$ в точке $(x_0; y_0)$: $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 + 1$, $y = 2x_0 \cdot x + (1 - x_0^2)$, он пересека-

ет ось Ox в точке $A\left(\frac{x_0^2 - 1}{2x_0}; 0\right)$. Т.е. необходимо $0 \leq x_0 \leq 1$ (иначе иско-мая фигура не трапеция, см. рис. 175). Площадь трапеции

$$S(x_0) = \int_0^1 (2x_0 \cdot x + (1 - x_0^2)) dx = (x_0 \cdot x^2 + (1 - x_0^2)x) \Big|_0^1 = -x_0^2 + x_0 + 1.$$

Максимум этой функции достигается в точке $x_0 = \frac{1}{2}$ (вершина параболы

$$y = -x^2 + x + 1). \text{ Ответ: } \left(\frac{1}{2}; 1\frac{1}{4}\right).$$

§59. Применение производной и интеграла к решению практических задач

1025. Указание: путь S , пройденный телом за промежуток времени $[t_1; t_2]$

$$\text{равен } S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

1026. Указание: начало движения соответствует моменту времени $t_1 = 0$. А остановка соответствует моменту времени t_2 , т.е. $v(t_2) = 0$, откуда $t_2 = 4$.

$$\text{Тогда } S = \int_0^4 (4t - t^2) dt.$$

1027. 1) $y' = 3 - 4x$. Решение: функция $y(x)$ есть первообразная функции $3 - 4x$, т.е. $y(x) = 3x - 2x^2 + C$, $C \in \mathbf{R}$. Ответ: $y(x) = 3x - 2x^2 + C$, $C \in \mathbf{R}$.
2)–6) аналогично 1).

1028. 1) $y' = \sin x$, $y(0) = 0$. Решение: $y(x)$ есть первообразная функции $\sin x$, т.е. $y(x) = -\cos x + C$. Т.к. $y(0) = 0$, то $C = 1$. Ответ: $y = -\cos x + 1$.
2)–4) аналогично 1).

5) Указание: $y(x) = e^x + C$, тогда $e^1 + C = 1$, откуда $C = 1 - e$.

6) Указание: $y(x) = -e^{-x} + C$, тогда $-e^0 + C = 2$, откуда $C = 3$.

1029. Указание: $y'' = -C_1\omega^2 \cos \omega x - C_2\omega^2 \sin \omega x$, подставьте это значение в выражение $y'' + \omega^2 y$.

1030. Указание: мы ищем период полураспада радия Т. Тогда по формуле из

$$\S 59 \quad m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}, \quad \text{т.е. } 0,999 = 1 \cdot 2^{-10/T}, \quad \text{откуда } \log_2 0,999 = -\frac{10}{T},$$

$$T = -\frac{10}{\log_2 0,999} \approx 6928 \text{ лет. Ответ: примерно } 6928 \text{ лет.}$$

1031, 1032. Аналогично задаче 4 §59.

Упражнения к главе X

1033. 1) $f(x) = \cos x$, $M(0; -2)$. Решение: первообразная $F(x) = \sin x + C$. Тогда $F(0) = \sin 0 + C = 0 + C = -2$, откуда $C = -2$. Ответ: $F(x) = \sin x - 2$.

2) $f(x) = \sin x$, $M(-\pi; 0)$. Решение: первообразная $F(x) = -\cos x + C$. Тогда $F(-\pi) = -\cos(-\pi) + C = 1 + C = 0$, откуда $C = -1$. Ответ: $F(x) = -\cos x - 1$.

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $M(4; 5)$. Решение: первообразная $F(x) = 2\sqrt{x} + C$. Тогда

$$F(4) = 2\sqrt{4} + C = 4 + C = 5, \quad \text{откуда } C = 1. \quad \text{Ответ: } F(x) = 2\sqrt{x} + 1.$$

4) $f(x) = e^x$, $M(0; 2)$. Решение: первообразная $F(x) = e^x + C$. Тогда $F(0) = e^0 + C = 1 + C = 2$, откуда $C = 1$. Ответ: $F(x) = e^x + 1$.

5) $f(x) = 3x^2 + 1$, $M(1; -2)$. Решение: первообразная $F(x) = x^3 + x + C$.

Тогда $F(1) = 2 + C = -2$, отсюда $C = -4$. Ответ: $F(x) = x^3 + x - 4$.

6) $f(x) = 2 - 2x$, $M(2; 3)$. Решение: первообразная $F(x) = 2x - x^2 + C$.

Тогда $F(2) = 4 - 4 + C = 3$, отсюда $C = 3$. Ответ: $F(x) = 2x - x^2 + 3$.

1034. 1) $\int_{-1}^2 2dx = 2x \Big|_{-1}^2 = 4 + 2 = 6$;

2) $\int_{-2}^2 (3-x)dx = \left(3x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{-2}^2 = 6 - 2 + 6 + 2 = 12$;

3) $\int_1^3 (x^2 - 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_1^3 = (9 - 9) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{2}{3}$;

4) $\int_{-1}^1 (2x - 3x^2)dx = (x^2 - x^3) \Big|_{-1}^1 = 0 - (1 + 1) = -2$;

5) $\int_1^8 \sqrt[3]{x} dx = \int_1^8 x^{1/3} dx = \frac{3}{4} x^{4/3} \Big|_1^8 = \frac{3}{4} (2^4 - 1^4) = \frac{15 \cdot 3}{4} = \frac{45}{4}$;

6) Указание: $\int_1^2 \frac{dx}{x^3} = \int_1^2 x^{-3} dx$.

7) Указание: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$.

1035. 1) Указание: $S = \int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{1/2} dx$.

2) Указание: $S = \int_0^{\pi/3} \cos x dx$.

3) Указание: $S = \int_{-2}^1 (2-x)dx - \int_{-2}^1 x^2 dx$. См. рис. 176.

4) Указание: $S = \int_{-3/4}^1 (0,5x + 1,5)dx - \int_{-3/4}^1 2x^2 dx$. См. рис. 177.

Проверь себя!

1. Указание: проверьте, что $F'(x) = f(x)$ при всех $x \in \mathbf{R}$.

2. Указание: $F(x) = x^3 + x^2 - 3x + C$; $F(1) = -2$.

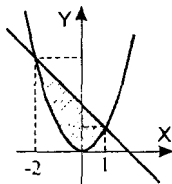


Рис. 176

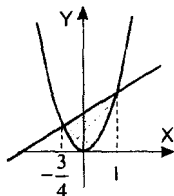


Рис. 177

$$3. 1) \int_1^2 3x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_1^2 = 12 - \frac{3}{4} = 11\frac{1}{4}; \quad 2) \int_2^4 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_2^4 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$3) \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1; \quad 4) \int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = -1.$$

$$4. 1) \text{ Указание: } S = \int_{-3}^2 (x^2 + x - 6) dx;$$

$$2) \text{ Указание: } S = \int_{-3}^3 10 dx - \int_{-3}^3 (x^2 + 1) dx.$$

$$1036. 1) \int_0^1 (5x^4 - 8x^3) dx = (x^5 - 2x^4) \Big|_0^1 = 1 - 2 = -1;$$

$$2) \int_{-1}^2 (6x^3 - 5x) dx = \left(\frac{3}{2} x^4 - \frac{5}{2} x^2 \right) \Big|_{-1}^2 = 24 - 10 - \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2} \right) = 15;$$

$$3) \int_1^4 \sqrt{x} \left(3 - \frac{7}{x} \right) dx = \int_1^4 \left(3x^{\frac{1}{2}} - 7x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \left(2x^{\frac{3}{2}} - 14x^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^4 = 16 - 28 - (2 - 14) = 0;$$

$$4) \int_1^8 4\sqrt{x} \left(1 - \frac{4}{x} \right) dx = \int_1^8 \left(4x^{\frac{1}{2}} - 16x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \left(3x^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 16x^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_1^8 = 48 - 3 \cdot 32 + 45 = -3;$$

$$5) \int_0^3 \sqrt{x+1} dx = \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = \frac{2}{3} (8-1) = \frac{14}{3};$$

$$6) \int_2^6 \sqrt{2x-3} dx = \int_2^6 (2x-3)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} (2x-3)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^6 = \frac{1}{3} (27-1) = \frac{26}{3};$$

$$1037. 1) \text{ Указание: } \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4}.$$

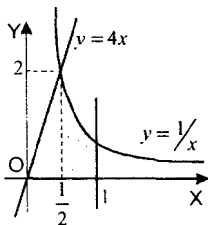


Рис. 178

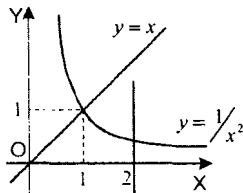


Рис. 179

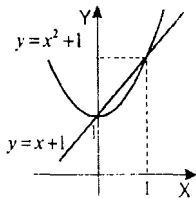


Рис. 180

2) Указание: $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) dx = -\frac{1}{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Big|_0^{\pi/3}$.

3) Указание: $\int_1^3 3 \sin(3x-6) dx = -\cos(3x-6) \Big|_1^3$.

4) Указание: $\int_0^3 8 \cos(4x-12) dx = 2 \sin(4x-12) \Big|_0^3$.

1038. Решение: найдем координаты точек пересечения графиков функций

$\frac{1}{x}$ и $4x$. $\frac{1}{x} = 4x$, $4x^2 = 1$, откуда $x = \pm \frac{1}{2}$. Тогда (см. рис. 178)

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} 4x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} dx = 2x^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ln|x| \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} + \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \ln 2. \text{ Ответ: } \frac{1}{2} + \ln 2.$$

2) Аналогично 1), см. рис. 179.

3) Указание: найдем точки пересечения: $x^2 = 2\sqrt{2x}$, $x^4 = 8x$, $x(x^3 - 8) = 0$, т.е. $x = 0$ и $x = 2$. См. рис. 180. Аналогично 1).

4) Аналогично 3).

1039. 1) Решение: найдем координаты точек пересечения графиков

$x^2 - 6x + 9 = x^2 + 4x + 4$; $10x = 5$, $x = \frac{1}{2}$. Тогда (см. рис. 181)

$$S = \int_{-2}^{\frac{1}{2}} (x+2)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^3 (x-3)^2 dx = \frac{(x+2)^3}{3} \Big|_{-2}^{\frac{1}{2}} + \frac{(x-3)^3}{3} \Big|_{\frac{1}{2}}^3 = \frac{125}{12} = 10 \frac{5}{12}.$$

Ответ: $10 \frac{5}{12}$.

2) Аналогично 1). См. рис. 182.

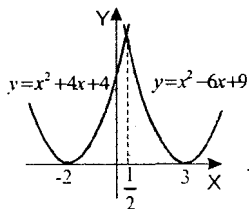


Рис. 181

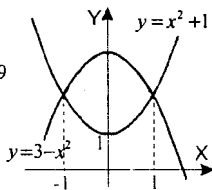


Рис. 182

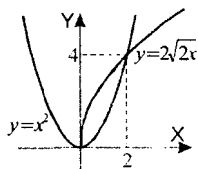


Рис. 183

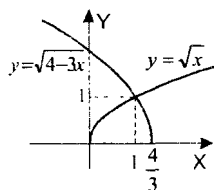


Рис. 184

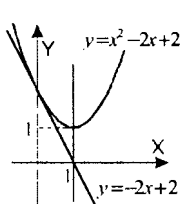


Рис. 185

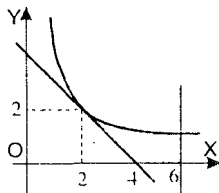


Рис. 186

3) Аналогично 1). См. рис. 183.

4) Решение: найдем координаты точек пересечения графиков:

$\sqrt{x} = \sqrt{4-3x}$, $x = 4-3x$, откуда $x = 1$. Тогда (см. рис. 184)

$$S = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^{4/3} \sqrt{4-3x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 - \frac{2}{9} (4-3x)^{3/2} \Big|_1^{4/3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}. \text{ Ответ: } \frac{8}{9}.$$

1040. 1) Указание: уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + 2$ в точке $(0; 2)$ имеет вид $y = -2x + 2$. Из рис. 185 видно, что

$$S = \int_0^1 (x^2 - 2x + 2) dx - \int_0^1 (-2x + 2) dx.$$

2) Указание: уравнение касательной к графику функции $y = \frac{4}{x}$ в точке

$(2; 2)$ имеет вид $y = 4 - x$, см. рис. 186. $S = \int_2^6 \frac{4}{x} dx - \int_2^4 (4 - x) dx.$

1041. 1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $x = 0$, $y = 6$, $x < 0$. Решение: Исследуем функцию $y(x)$ на экстремум: $y'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$. Т.е. в точке

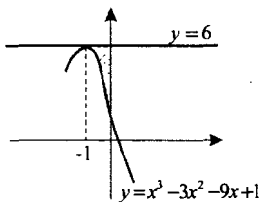


Рис. 187

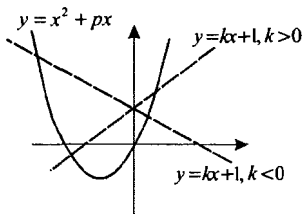


Рис. 188

$x_0 = -1$ функция имеет максимум, $y(-1) = 6$. Следовательно (см. рис.

$$187) \quad S = \int_{-1}^0 6 dx - \int_{-1}^0 (x^3 - 3x^2 - 9x + 1) dx = 6 - \left(\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{9x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^0 =$$

$$= 6 + \frac{1}{4} + 1 - \frac{9}{2} - 1 = 1,75. \text{ Ответ: } 1,75.$$

2) Аналогично 1).

1042. Указание: аналогично задаче 1024, см. рис. 188.

Упражнения

для итогового повторения

курса алгебры и начал анализа

1. Числа и алгебраические преобразования

1043. Найти 2,5% от 3,2. Решение: искомым число равно $2,5 \cdot 0,01 \cdot 3,2 = 0,08$.
Ответ: 0,08.

1044. Найти число, если 42% его составляют 12,6. Решение: пусть x – искомым число, тогда $0,42x = 12,6$. Откуда $x = 12,6 : 0,42 = 30$. Ответ: 30.

1045. Какой процент составляет 1,3 от 39? Решение: пусть x – процент, тогда $39 \cdot \frac{x}{100} = 1,3$. Откуда $x = 1,3 \cdot 100 : 39 = 3\frac{1}{3}\%$. Ответ: $3\frac{1}{3}\%$.

1046. Сколько процентов составляет 46,6 от 11,65? Решение: пусть y – процент, тогда $46,6 = \frac{y}{100} \cdot 11,65$. Откуда $y = 100 \cdot 46,6 : 11,65 = 400\%$.
Ответ: 400%.

1048. Найти 180% от 7,5. Решение: искомым число равно $180 : 100 \cdot 7,5 = 13,5$.
Ответ: 13,5.

1049. Решение: пусть изначально товар стоил x , тогда после первого снижения цены его цена стала $x - 0,24x = 0,76x$. После второго снижения цены цена составила $0,76x - 0,5 \cdot 0,76x = 0,38x$. Т.е. новая цена составила 38% от прежней, значит цена снизилась на $100\% - 38\% = 62\%$. Ответ: 62%.

1050. Решение: масса сплава равна $18 + 6 + 36 = 60$ кг. Тогда 18 кг цинка составляют $18 : 60 \cdot 100 = 30\%$ сплава; 6 кг олова составляют $6 : 60 \cdot 100 = 10\%$ сплава; а 36 кг меди $36 : 60 \cdot 100 = 60\%$.
Ответ: 30%, 10% и 60%.

1051. Решение: пусть x – стоимость товара, тогда расходы по перевозке составляют 0,08 x . Откуда $3942 = x + 0,08x$, т.е. $x = \frac{3942}{1+0,08} = 3650$.

Ответ: 3650 р.

1052. Решение: объем пирамиды равен $\frac{1}{3}hS$, где h – высота, а S – площадь основания. Откуда объем новой пирамиды равен:

$$\frac{1}{3} \cdot 1,1h \cdot 1,1S = \frac{1}{3}hS \cdot 1,21.$$

Т.е. независимо от начальных параметров, объем пирамиды увеличится на 21%. Ответ: 21%.

1053. Решение: пусть x – данное число, тогда существует целое число k , такое что $x = 72k + 68$. Откуда $x = 12 \cdot 6k + 12 \cdot 5 + 8 = 12(6k + 5) + 8$. Т.к.

$6k + 5 \in \mathbb{Z}$, то остаток от деления x на 12 равен 8. Ответ: 8.

1054. Решение: пусть x и y – искомые числа, тогда:

$$\begin{cases} x + y = 1100 \\ 0,06x = 0,05y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1100 - y \\ 6x = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1100 - y \\ 11y = 6600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 500 \\ y = 600 \end{cases}$$

Ответ: $x = 500$, $y = 600$.

1055. Решение: сумма вклада через n лет вычисляется по формуле: $600 \cdot (1 + 0,03)^n$, т.е. через 2 года сумма составит $600 \cdot (1 + 0,03)^2 = 636,54$ р., а через 3 года $600 \cdot (1 + 0,03)^3 = 656,6262$. Ответ: 636 р. 54 к.; 656 р. 63 к.

1056. Решение: сумма вклада через месяц составила $500 \cdot 1,02^{1/12}$ р., т.е. после снятия 100 р. на счету осталось $500 \cdot 1,02^{1/12} - 100$ р. Соответственно, через

год сумма вклада увеличится до $(500 \cdot 1,02^{1/12} - 100) \cdot 1,02 \approx 408,84$.

Ответ: 408 р. 84 коп.

1057. 1) $23,276 : 2,3 - 3,6 \cdot (17,2 \cdot 0,125 + 0,005 : 0,1) + 6,25 \cdot 3,2 =$
 $= 10,12 - 3,6(2,15 + 0,05) + 20 = 22,2.$

2) $9,25 \cdot 1,04 - (6,372 : 0,6 + 1,125 \cdot 0,8) : 1,2 + 0,16 \cdot 6,25 =$
 $= 9,62 - (10,62 + 0,9) : 1,2 + 1 = 9,62 - 9,6 + 1 = 1,02.$

1058. 1)
$$\frac{\left(28 : 1\frac{3}{4} + 7\frac{1}{3} : 22 + 1\frac{2}{3} \cdot 9\frac{3}{4} + 14 : 1\frac{1}{2}\right) \cdot 3\frac{1}{7}}{10\frac{1}{2} - 9\frac{3}{4}} = \frac{\left(\frac{28 \cdot 4}{7} + \frac{22 \cdot 1}{3 \cdot 22} + \frac{5 \cdot 39}{3 \cdot 4} + \frac{14 \cdot 2}{3}\right) \cdot \frac{22}{7}}{\frac{21}{2} - \frac{39}{4}}$$

$$= \left(16 + \frac{1}{3} + \frac{65}{4} + \frac{28}{3}\right) \frac{22 \cdot 4}{7 \cdot 3} = \frac{503 \cdot 22 \cdot 4}{12 \cdot 7 \cdot 3} = 175\frac{41}{63}.$$

2) $\left(\frac{1}{2} - 0,375\right) : 0,125 + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) : (0,358 - 0,108) = 0,125 : 0,125 + 0,25 : 0,25 = 2.$

1059. 1) $x = 10 : \frac{1}{8} \cdot 1\frac{1}{4} = 100;$

2) $x = 9\frac{1}{2} : 14\frac{1}{4} \cdot 0,75 = 0,5;$

$$3) x = 15 \cdot 1,456 : 1,05 = 20,8.$$

$$1060. \left(\frac{15 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{\frac{1}{3}}} - 2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 49^{\frac{1}{4}} \right) \left(\left(\frac{1}{81} \right)^{\frac{1}{4}} + 45^{\frac{1}{2}} \right) - 183\sqrt{5} = \left(\frac{15\sqrt{5}}{1/5} - 2 \cdot 7 \right) (3 + 3\sqrt{5}) - 183\sqrt{5} = \\ = (75\sqrt{5} - 14)(3 + 3\sqrt{5}) - 183\sqrt{5} \approx 225\sqrt{5} - 42 + 1125 - 42\sqrt{5} - 183\sqrt{5} = 1083.$$

$$1061. 1) \log_{27} 729 = \log_3 3^6 = \frac{6}{3} \log_3 3 = 2;$$

$$2) \log_9 729 = \frac{6}{2} \log_3 3 = 3;$$

$$3) \log_{\frac{1}{3}} 729 = -6 \log_3 3 = -6.$$

$$1062. 1) \log_{\frac{1}{16}} \sqrt[3]{64} = \log_{2^{-4}} 2^{\frac{6}{3}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{6}{5} = -0,3;$$

$$2) \log_8 \log_4 \log_2 16 = \log_8 \log_4 \log_2 2^4 = \log_8 \log_4 4 = \log_8 1 = 0.$$

$$1063. 1) \left(2^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^{\sqrt{8}} = 2^{\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}} = 2^2 = 4; \quad 2) \left(2^{\sqrt[3]{27}} \right)^{\sqrt{3}} \cdot 2^{-3} = 2^{\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{3} - 3} = 2^6 = 64.$$

$$1064. 1) \log_3 \frac{9}{\sqrt[3]{3}} + \log_6 \sqrt[3]{36} = \log_3 3^2 \cdot \frac{1}{3} + \log_6 6^{\frac{2}{3}} = 2 - \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 2,2;$$

$$2) 16^{0,5 \log_4 10 + 1} = 16^{3,5 \log_4 10} \cdot 16 = (4^2)^{0,5 \log_4 10} \cdot 16 = 4^{\log_4 10} \cdot 16 = 16 \cdot 10 = 160.$$

$$1065. 1) 2,5^{\frac{1}{2}} \text{ и } 2,5^{0,5}. \text{ Решение: т.к. } 2,5 > 1, \text{ то функция } y = 2,5^x \text{ возрастает.}$$

$$\text{Следовательно, если } \frac{1}{7} < 0,5, \text{ то } 2,5^{\frac{1}{7}} < 2,5^{0,5}. \text{ Ответ: } 2,5^{\frac{1}{7}} < 2,5^{0,5}.$$

$$2) 0,2^{\frac{2}{3}} \text{ и } 0,2^{\frac{3}{4}}. \text{ Решение: т.к. } 0,2 < 1, \text{ то функция } y = 0,2^x \text{ убывает. Следо-}$$

$$\text{вательно, если } \frac{2}{3} < \frac{3}{4}, \text{ то } 0,2^{\frac{2}{3}} > 0,2^{\frac{3}{4}}. \text{ Ответ: } 0,2^{\frac{2}{3}} > 0,2^{\frac{3}{4}}.$$

$$3) \log_{3,1} \sqrt{10} \text{ и } \log_{3,1} 3. \text{ Решение: т.к. } 3,1 > 1, \text{ то } y = \log_{3,1} x \text{ возрастает.}$$

$$\text{Следовательно, если } \sqrt{10} > 3, \text{ то } \log_{3,1} \sqrt{10} > \log_{3,1} 3.$$

$$\text{Ответ: } \log_{3,1} \sqrt{10} > \log_{3,1} 3.$$

$$4) \log_{0,3} \frac{4}{5} \text{ и } \log_{0,3} \frac{3}{4}. \text{ Решение: т.к. } 0 < 0,3 < 1, \text{ то } y = \log_{0,3} x \text{ убывает.}$$

$$\text{Следовательно, если } \frac{4}{5} > \frac{3}{4}, \text{ то } \log_{0,3} \frac{4}{5} < \log_{0,3} \frac{3}{4}. \text{ Ответ: } \log_{0,3} \frac{4}{5} < \log_{0,3} \frac{3}{4}.$$

1066. 1) $a^{0,2} > 1$. Т.к. $0,2 > 0$ и $a^{0,2} > a^0$, то функция $y = a^x$ возрастает, следовательно $a > 1$. Ответ: $a > 1$.

2) $a^{-1,3} > 1$. Т.к. $-1,3 < 0$, а $a^{-1,3} > a^0$, то функция $y = a^x$ убывает, следовательно $0 < a < 1$. Ответ: $0 < a < 1$.

3) $a^{-3,1} < 1$. Т.к. $-3,1 < 0$, а $a^{-3,1} < a^0$, то функция $y = a^x$ возрастает, следовательно $a > 1$. Ответ: $a > 1$.

4) $a^{2,7} < 1$. Т.к. $2,7 > 0$, а $a^{2,7} < a^0$, то функция $y = a^x$ убывает, следовательно $0 < a < 1$. Ответ: $0 < a < 1$.

5) $\log_a 0,2 > 0$. Т.к. $0,2 < 1$, а $\log_a 0,2 > \log_a 1$, то функция $y = \log_a x$ убывает, следовательно $0 < a < 1$. Ответ: $0 < a < 1$.

6) $\log_a 1,3 > 0$. Т.к. $1,3 > 1$, а $\log_a 1,3 > \log_a 1$, то функция $y = \log_a x$ возрастает, следовательно $a > 1$. Ответ: $a > 1$.

1067. 1) $\sqrt{18}$ и $4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{11}}$. Решение: $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; $4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{11}} = 3^2 \cdot \frac{5}{11} = 3 \cdot \frac{15}{11}$.

Т.к. $\sqrt{2} > \frac{15}{11}$ (т.к. $2 > \left(\frac{15}{11}\right)^2$), то $\sqrt{18} > 4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{11}}$.

Ответ: $\sqrt{18} > 4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{11}}$.

2) $\sqrt[3]{18}$ и $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2} \log_6 \sqrt{5}}$. Решение: $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2} \log_6 \sqrt{5}} = (2)^{-1} \cdot 5 = \frac{5}{2}$. Возв-

дем оба числа в куб, получим $18 > \frac{125}{8} = 15 \frac{5}{8}$. Ответ: $\sqrt[3]{18} > \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2} \log_6 \sqrt{5}}$

1068. 1) $\lg 50$. Решение: $\lg 50 = \lg(5 \cdot 10) = \lg 5 + 1$. Т.к. $1 < 5 < 10$, то $0 < \lg 5 < 1$, поэтому $1 < \lg 50 < 2$. Ответ: $1 < \lg 50 < 2$.

2) $\log_2 10$. Решение: $\log_2 10 = 1 + \log_2 5$. Т.к. $2 < \log_2 5 < 3$, поэтому $3 < \log_2 10 < 4$. Ответ: $3 < \log_2 10 < 4$.

1069. 1) $3\sqrt{\frac{5}{9}} - \frac{1}{2}\sqrt{20} + 3\sqrt{180} - 4\sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{9}} - \frac{1}{2}\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} + 3\sqrt{36} \cdot \sqrt{5} - \frac{4\sqrt{25} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{4}} =$
 $= \sqrt{5} - \sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 10\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} - \frac{3 \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} - \frac{4 \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} =$

$$= \sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{6} - \sqrt{2} = 0.$$

$$1070. 1) \sqrt{a^4(9a^2 - 6a + 1)} = \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{(3a-1)^2} = |a^2| \cdot |3a-1| = a^2|3a-1|;$$

$$2) \sqrt{b^2(4b^4 + 4b^2 + 1)} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{(2b^2 + 1)^2} = |b| \cdot (2b^2 + 1).$$

$$1071. 1) \frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = 5(\sqrt{3} + \sqrt{2});$$

$$2) \frac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{6} - \sqrt{5})}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} = 3(\sqrt{6} - \sqrt{5});$$

$$3) \frac{12}{\sqrt{10} - \sqrt{7}} = \frac{12(\sqrt{10} + \sqrt{7})}{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{7})^2} = 4(\sqrt{10} + \sqrt{7});$$

$$4) \frac{8}{\sqrt{11} + \sqrt{3}} = \frac{8(\sqrt{11} - \sqrt{3})}{(\sqrt{11})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{11} - \sqrt{3}.$$

$$1072. 1) \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{1}{2\sqrt{5}}; \quad 2) \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{3}{\sqrt{6}};$$

$$3) \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} = \frac{7-5}{2(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}.$$

$$1073. 1) 0, (4). \text{ Решение: } 10 \cdot 0, (4) = 4, (4), \text{ тогда } (10-1) \cdot 0, (4) = 4, (4) - 0, (4) = 4,$$

$$\text{т.е. } 9 \cdot 0, (4) = 4, \text{ откуда } 0, (4) = \frac{4}{9}. \text{ Ответ: } 0, (4) = \frac{4}{9}.$$

$$2) 2, (7). \text{ Решение: } 10 \cdot 2, (7) = 27, (7), \text{ тогда } 9 \cdot 2, (7) = 27, (7) - 2, (7) = 25,$$

$$\text{т.е. } 2, (7) = \frac{25}{9}. \text{ Ответ: } 2, (7) = \frac{25}{9}.$$

$$3) 0, (21). \text{ Решение: } 100 \cdot 0, (21) = 21, (21), 99 \cdot 0, (21) = 21, (21) - 0, (21) = 21,$$

$$\text{т.е. } 0, (21) = \frac{21}{99}. \text{ Ответ: } 0, (21) = \frac{7}{33}.$$

$$4) 1, (36). \text{ Решение: } 100 \cdot 1, (36) = 136, (36), 99 \cdot 1, (36) = 136, (36) - 1, (36) = 135,$$

$$\text{т.е. } 1, (36) = \frac{135}{99}. \text{ Ответ: } 1, (36) = \frac{15}{11}.$$

$$5) 0,3(5). \text{ Решение: } 10 \cdot 0,3(5) = 3,5(5), 9 \cdot 0,3(5) = 3,5(5) - 0,3(5) = 3,2, \text{ т.е.}$$

$$0,3(5) = \frac{3,2}{9} = \frac{16}{45}. \text{ Ответ: } 0,3(5) = \frac{16}{45}.$$

6) $0,21(3)$. Решение: $10 \cdot 0,21(3) = 2,13(3)$, $9 \cdot 0,21(3) = 2,13(3) - 0,21(3) = 1,92$,

т.е. $0,21(3) = \frac{1,92}{9} = \frac{16}{75}$. Ответ: $0,21(3) = \frac{16}{75}$.

1074. 1) $\frac{5}{6} = 0,8(3)$;

2) $2\frac{1}{9} = \frac{19}{9} = 2,(1)$;

3) $\frac{1}{7} = 0,(142857)$;

4) $5\frac{2}{11} = \frac{57}{11} = 5,(18)$.

1075. Ответ: да, например: $a = \sqrt{2} + 1$, $b = \sqrt{2} - 1$.

1076. Указание: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{|b|}$.

1077. Указание: представим $a = \frac{p}{q}$, где $p \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{Z}$. Если $a + b$ рациональное число, то $a + b = \frac{p_1}{q_1}$, где $p_1 \in \mathbf{N}$, $q_1 \in \mathbf{Z}$, тогда $b = \frac{p_1}{q_1} - \frac{p}{q}$ — рациональное число. Аналогично для произведения и частного.

1078. 1) $[1; 3\sqrt{2} + 2\sqrt{7}]$ и $[3\sqrt{3} + 4; 15]$. Решение: $1 < 3\sqrt{3} + 4$, поэтому необходимо сравнить $3\sqrt{2} + 2\sqrt{7}$ и $3\sqrt{3} + 4$. Возведем оба числа в квадрат, получим $46 + 12\sqrt{14}$ и $43 + 24\sqrt{3}$. Сравним числа $3 + 12\sqrt{14}$ и $24\sqrt{3}$, сократим на 3, получим $1 + 4\sqrt{14}$ и $8\sqrt{3}$. Снова возведем в квадрат, получим $225 + 8\sqrt{14}$ и 192 . Т.к. второе число меньше, то $3\sqrt{2} + 2\sqrt{7} > 3\sqrt{3} + 4$, значит промежутки имеют общие точки.

2)–4) аналогично 1).

1079. 1) Указание: проверьте, что $\left| a - \frac{a+b}{2} \right| = \left| b - \frac{a+b}{2} \right|$.

2) Указание: проверьте, что при $c > 0$ справедливо неравенство

$$a < \frac{a+bc}{1+c} < b.$$

1080. 1) Указание: высота правильного треугольника равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, откуда радиус вписанной окружности равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

2) Указание: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{4,5 : 2}{a}$.

1081. Указание: $\operatorname{tg} 54^\circ = \frac{120}{l}$.

1082. Решение: $AB = AD + DB$ (см. рис. 189), т.к.

$$\operatorname{tg} 68^\circ = \frac{DC}{AD}, \operatorname{tg} 46^\circ = \frac{DC}{DB}, \text{ то}$$

$$AB = \frac{DC}{\operatorname{tg} 68^\circ} + \frac{DC}{\operatorname{tg} 46^\circ} = 130 \left(\frac{1}{\operatorname{tg} 68^\circ} + \frac{1}{\operatorname{tg} 46^\circ} \right) \approx 178$$

Ответ: длина моста ≈ 178 м.

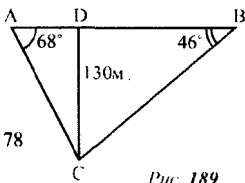


Рис. 189

1083. 1) $\cos \alpha = 0,8$, $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - (0,8)^2} = 0,6$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{3}$. Ответ: $\sin \alpha = 0,6$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$.

2) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{13}$; $\frac{12}{13} = \frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{5}$.

3) $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}$; $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2,4^2 + 1}} = \frac{5}{13}$; $\sin \alpha = 2,4 \cdot \frac{5}{13} = \frac{12}{13}$.

4) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$; $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)^2 + 1}} = \frac{7}{25}$; $\sin \alpha = \frac{24}{7} \cdot \frac{7}{25} = \frac{24}{25}$.

1084. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

1085. $\sin \frac{11\pi}{3} + \cos 690^\circ - \cos \frac{19\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

1086. 1) $2 \operatorname{arctg} 1 - 3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 3 \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$.

2) $8 \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 8 \cdot \frac{\pi}{4} + 6 \cdot \frac{\pi}{3} = 4\pi$.

1087. 1) $\sin\left(2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cos\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 3) = \frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3)}{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 3)} = \frac{2 \cdot 3}{1 - 3^2} = -\frac{3}{4}$.

1088. 1) $\log_4 \sin \frac{\pi}{4} = \log_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_2 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}$;

$$2) \log_{10} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \log_{10} 1 = 0;$$

$$3) \log_8 \sin \frac{3}{4}\pi = \log_8 \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_2 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6};$$

$$4) \log_2 \cos \frac{1}{3}\pi = \log_2 \frac{1}{2} = -1;$$

$$5) \log_3 1 - \log_4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \log_5 \cos 0 = 0 + \log_4 1 \cdot \log_5 1 = 0.$$

$$1089. 1) \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \sqrt{3}) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$2) \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 1) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1)} = 1;$$

$$3) \sin(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})) = \sin(-\operatorname{arctg} \sqrt{3}) = -\sin(\operatorname{arctg} \sqrt{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$4) \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$5) \cos(\operatorname{arctg} 1) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$6) \cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})) = \cos(-\operatorname{arctg} \sqrt{3}) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$1090. 1) \cos\left(6 \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} = 0;$$

$$2) \sin(5 \arccos 0) = \sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$1091. 1) \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha / \cos \alpha}{\sin^2 \alpha / \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{9-16} = -\frac{12}{7};$$

$$2) \text{Т.к. } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha, \text{ то } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{2} = -\frac{4}{9}.$$

$$1092. 1) \frac{a+2}{a-2} \cdot \left(\frac{2a^2-a-3}{a^2+5a+6} \cdot \frac{2a-3}{a-2}\right) = \frac{a+2}{a-2} \cdot \frac{(a+1)(2a-3)}{(a+2)(a+3)} \cdot \frac{a-2}{2a-3} = \frac{a+1}{a+3};$$

$$2) \left(2 + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{8b^2+8b+2}{b^2-4b} \cdot \frac{2b+1}{b} = \frac{2b+1}{b} \cdot \frac{b(b-4)}{2(2b+1)^2} \cdot \frac{2b+1}{b} = \frac{b-4}{2b}.$$

$$1093. 1) \frac{a}{a^2-1} + \frac{a^2+a+1}{a^3-a^2+a-1} + \frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1} - \frac{2a^3}{a^4-1} =$$

$$= \frac{a}{(a-1)(a+1)} + \frac{a^2+a+1}{(a^2+1)(a-1)} + \frac{a^2-a-1}{(a^2+1)(a+1)} - \frac{2a^3}{(a^2+1)(a-1)(a+1)} =$$

$$= \frac{a^3+a^2+2a+2}{(a^2+1)(a-1)(a+1)} = \frac{(a^2+2)(a+1)}{(a^2+1)(a-1)(a+1)} = \frac{a^2+2}{(a^2+1)(a-1)};$$

$$2) \frac{1}{a^2+5a+6} + \frac{2a}{a^2+4a+3} + \frac{1}{(a+1)^2+a+1} - \frac{2}{a+3} =$$

$$= \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{2a}{(a+3)(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} - \frac{2}{a+3} =$$

$$= \frac{(a+1)+2a(a+2)+(a+3)-2(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}.$$

$$1094. 1) \frac{1}{4+4\sqrt{a}} - \frac{1}{2-2a} + \frac{1}{4-4\sqrt{a}} = \frac{1-\sqrt{a}-2+1+\sqrt{a}}{4 \cdot (1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})} = 0;$$

$$2) \frac{a\sqrt{2}+a-\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}-2-\sqrt{2}+2a} = \frac{(\sqrt{2}+1)(a-1)}{(\sqrt{2}+2)(a-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}.$$

$$1095. 1) \left(1 + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) = 1 - \frac{a-x}{a+x} = \frac{2x}{a+x} = \frac{8}{9};$$

$$2) \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{(a+\sqrt{a^2-x^2})^2 - (a-\sqrt{a^2-x^2})^2}{a^2 - (a^2-x^2)} =$$

$$= \frac{4a\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} = \frac{4 \cdot 3\sqrt{4}}{5} = 4,8.$$

1096. 1) Указание: $x^{\frac{1}{2}} - x = x^{\frac{1}{2}}(1 - x^{\frac{1}{2}})$, приведите дроби к общему знаменателю, аналогично 2).

$$2) \frac{m+2m^{\frac{1}{2}}+1}{2m^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{2m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}-1} - \frac{4m^{\frac{1}{2}}}{m-1}\right) = \frac{(m^{\frac{1}{2}}+1)^2}{2m^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2m^{\frac{1}{2}}(m^{\frac{1}{2}}+1) - 4m^{\frac{1}{2}}}{(m^{\frac{1}{2}}-1)(m^{\frac{1}{2}}+1)} =$$

$$= \frac{(m^{\frac{1}{2}}+1)(2m-2m^{\frac{1}{2}})}{2m^{\frac{1}{2}}(m^{\frac{1}{2}}-1)} = m^{\frac{1}{2}}+1.$$

$$1097. 1) 6n \cdot \sqrt{\frac{m}{2n}} \cdot \sqrt{18mn} = 6n \cdot \sqrt{\frac{m}{2n} \cdot 18mn} = 6n \cdot \sqrt{9m^2} = 18n|m|;$$

$$2) \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1} \cdot a^{\frac{1}{4}} = \frac{(a^{\frac{1}{2}}-1)(a^{\frac{1}{2}}+1) \cdot a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}+1) \cdot a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{4}}+1)(a^{\frac{1}{2}}+1)} = \sqrt{a}-1$$

$$1098. 1) \left(\frac{a\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{a} \right) : \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} = \frac{a\sqrt{a}-1+a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{a-1} = \frac{(\sqrt{a}+1)(a-1)}{a-1} = \sqrt{a}+1;$$

$$2) \left(\frac{1+b\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}} - \sqrt{b} \right) \cdot \frac{1+\sqrt{b}}{1-b} = \left(\frac{(1+\sqrt{b})(1-\sqrt{b}+b)}{1+\sqrt{b}} - \sqrt{b} \right) \cdot \frac{1+\sqrt{b}}{1-b} =$$

$$= \frac{(1-\sqrt{b})(1+\sqrt{b})}{(1+\sqrt{b})(1-\sqrt{b})} = 1 - \sqrt{b}.$$

$$1099. \frac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-1}}{a^{-\frac{1}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{1}{3}}a^{-2}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{-2}b^{-2}(a-b)}{a^{-2}b^{-2}(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})}{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}.$$

$$1100. 1) \left(\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2+ab}} - \frac{\sqrt{ab+b^2}}{\sqrt{ab+b}} \right)^2 - \frac{\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}}{2ab} = \left(\frac{2ab}{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{a+b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \right)^2 -$$

$$\frac{\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}}{2ab} = \frac{(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 2(\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3})}{4ab} = \frac{a^2+2ab+b^2}{4ab} = \frac{(a+b)^2}{4ab};$$

$$2) (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{2(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3} = \frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \cdot \frac{a+b}{ab} + \frac{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3} =$$

$$= \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{ab(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \frac{1}{ab}.$$

$$1101. \text{Указание: } 9a-25a^{-1} = \left(3a^{\frac{1}{2}}-5a^{-\frac{1}{2}} \right) \left(3a^{\frac{1}{2}}+5a^{-\frac{1}{2}} \right);$$

$$a + 7 + 10a^{-1} = \left(a^{1/2} + 2a^{-1/2} \right) \left(a^{1/2} + 5a^{-1/2} \right).$$

$$1102. \left(\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b^3 - 9\sqrt{b}}} + \frac{1}{\sqrt{b} - \sqrt[3]{b}} \right)^{-2} - (b^2 + 18b + 81)^{0.5} = \left(\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b(b-9)}} + \frac{\sqrt{b}}{b-9} \right)^{-2} - \sqrt{(b+9)^2} =$$

$$= \left(\frac{3 + \sqrt{b}}{b-9} \right)^{-2} - b - 9 = (\sqrt{b} - 3)^2 - b - 9 = -6\sqrt{b}, \text{ т.к. по смыслу задачи } b > 0.$$

$$1103. 1) \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha}{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

$$2) \text{Решение: т.к. } (1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{ctg} \alpha) = \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \left(1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\cos \alpha \sin \alpha}$$

$$= \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha} + 2, \text{ то } (1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{ctg} \alpha) - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2.$$

$$1104. \frac{1 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha \cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} =$$

$$= \frac{-2 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha (\sin^2 \alpha - 1)} = \frac{-2 \sin^2 \alpha}{-\cos^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$1105. 1) \sin^2(\alpha + 8\pi) + \cos^2(\alpha + 10\pi) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$2) \cos^2(\alpha + 6\pi) + \cos^2(\alpha - 4\pi) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha.$$

$$1106. \frac{\sin 2\alpha}{2(1 - 2 \cos^2 \alpha)} + \frac{\sin \alpha \cos(\pi - \alpha)}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{-2 \cos 2\alpha} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha - \frac{1}{2} \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha = -\operatorname{tg} 2\alpha.$$

$$1107. \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 1 - \sin \alpha - 1 - \cos \alpha =$$

$$= -\sin \alpha - \cos \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$1108. 1) 1 + \cos \alpha + \sin \alpha = 1 + \sqrt{2} \left(\cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} + \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} \right) = 1 + \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 2\sqrt{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\alpha}{2}.$$

2) Аналогично 1).

$$3) 3 - 4 \sin^2 \alpha = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin \alpha \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \alpha \right) = 4 \left(\sin \frac{\pi}{3} - \sin \alpha \right) \left(\sin \frac{\pi}{3} + \sin \alpha \right) =$$

$$= 4 \cdot 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= 4 \cdot 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2} \right) = 4 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right).$$

4) Аналогично 3).

1109. 1) $\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$. Решение: преобразуем левую часть: $\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = \sin \alpha + \sin \beta - \sin(\pi - (\alpha + \beta)) =$

$$= \sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot (-2) \sin \left(-\frac{\beta}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}. \text{ Преобразуем правую часть: } 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} =$$

$$= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}, \text{ ч.т.д.}$$

2) Аналогично 1).

$$1110. 1) \frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{3 \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + 3 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{4 + 2}{1 + 6} = \frac{6}{7}.$$

$$2) \frac{2 - \sin^2 \alpha}{3 + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{3 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) + 1} = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \operatorname{tg}^2 \alpha}{3(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 1} = \frac{2 \cdot 5 - 4}{3 \cdot 5 + 1} = \frac{3}{8}.$$

1111. Решение: $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2$, следовательно $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$. Ответ: 7.

$$1112. 1) \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)} - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = 0;$$

$$2) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) - \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) - \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2} =$$

$$= \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) - \frac{\sin^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)}{\cos^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)} = 0.$$

$$1113. 1) \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta;$$

$$2) (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha + 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2;$$

3), 4) Указание: воспользуйтесь формулами суммы для синуса и косинуса.

$$1114. 1) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = \sin 2\alpha;$$

$$2) \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$1115. 1) \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha : \sin^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$2) \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

3) Аналогично задаче 1113 п.1);

$$4) (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 =$$

$$= \frac{1 - \cos^2 2\alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 2\alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 4.$$

$$1116. 1) \frac{1 + \cos 2\alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha} = \cos \alpha;$$

$$2) \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha} = \frac{\frac{1}{\cos \alpha} - 1}{\frac{1}{\cos \alpha} + 1} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$3) \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \frac{\sin 3\alpha + 2 \sin 3\alpha \cos 2\alpha}{\cos 3\alpha + 2 \cos 3\alpha \cos 2\alpha} = \frac{\sin 3\alpha(1 + 2 \cos 2\alpha)}{\cos 3\alpha(1 + 2 \cos 2\alpha)} = \operatorname{tg} 3\alpha;$$

$$4) \frac{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \sin 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

1117. 1) Указание: $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$;

2) Указание: $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

$$1118. 1) \frac{1 - \cos(2\pi - 2\alpha)}{1 - \cos^2(\alpha + \pi)} = \frac{1 - \cos(-2\alpha)}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} = 2, \text{ ч.т.д.}$$

$$2) \frac{\sin^2(\alpha + 90^\circ)}{1 + \sin(-\alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} = 1 + \sin \alpha = 1 + \cos(\alpha - 90^\circ), \text{ ч.т.д.}$$

$$1119. \frac{5 \cos x - 3 \sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x)} - \frac{\sin 2x - 8 \sin^2 x}{\cos 2x} = \frac{5 \cos x - 3 \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\sin 2x - 8 \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{2 \sin x (\cos x - 4 \sin x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{(5 \cos x - 3 \sin x)(\cos x + \sin x) - 2 \sin x (\cos x - 4 \sin x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} =$$

$$= \frac{5 \cos^2 x + 5 \sin^2 x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{5}{\cos^2 x - \sin^2 x}.$$

1120. Указание: воспользуйтесь формулами приведения и тождеством $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$.

$$1121. 1) \cos^2(\alpha + 2\beta) + \sin^2(\alpha - 2\beta) - 1 = (\cos \alpha \cos 2\beta - \sin \alpha \sin 2\beta)^2 +$$

$$+ (\sin \alpha \cos 2\beta - \cos \alpha \sin 2\beta)^2 - 1 = \cos^2 \alpha \cos^2 2\beta + \sin^2 \alpha \sin^2 2\beta +$$

$$+ \sin^2 \alpha \cos^2 2\beta + \cos^2 \alpha \sin^2 2\beta - 1 =$$

$$= \cos^2 \alpha (\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta) + \sin^2 \alpha (\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta) - 1 = 0.$$

2) Аналогично 1).

1122. 1) Указание: воспользуйтесь формулой разности косинусов в числителе, аналогично 2).

2) Указание: $1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = 1 + \cos 2\alpha + 2 \cos \alpha \cos 2\alpha$, воспользуйтесь формулой $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 1$.

$$1123. 1) \frac{4 \sin^2 \alpha - \sin^2 2\alpha}{4 - 4 \sin^2 \alpha - \sin^2 2\alpha} = \frac{4 \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{4 \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha}{4 \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{4 \sin^4 \alpha}{4 \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha;$$

$$2) \frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \left(\frac{\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha} \right) \left(\frac{\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 2\alpha} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$1124. 1) \text{ Указание: } \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right), \quad \cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$2) \frac{1 + \cos x + \sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos x + \cos x (\cos x + \sin x) + \sin x}{\cos x (\cos x + \sin x)} =$$

$$= \frac{(\cos x + 1)(\cos x + \sin x)}{\cos x (\cos x + \sin x)} = \frac{\cos x + 1}{\cos x}.$$

1125. Указание: разделите числитель и знаменатель дроби на $\cos^2 x$.

$$1126. \frac{2 - 3 \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha} \frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 - 3 \sin^2 \alpha - (\sin \alpha + 2 \cos \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 - 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \sin \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}.$$

1127. Указание: распишите тангенс по определению, затем воспользуйтесь формулой синуса и косинуса суммы или разности.

$$1128. 1) 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 1 + \cos 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 1 + \sin \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$2) 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 1 - \cos 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 1 - \sin \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$1129. 1) \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha = \sqrt{3} \cos \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$2) \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) + \cos \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} \cos \alpha = \sqrt{3} \cos \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$1130. 1) \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$2) \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$1131. (1 + \cos \alpha) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (1 + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1) \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$1132. 1) 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}, \text{ ч.т.д.}$$

$$2) 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}, \text{ ч.т.д.}$$

$$1133. \text{Решение: преобразуем правую часть: } 4 \cos \alpha \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2} \right) = \\ = 2 \cos \alpha \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \right) = \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$1134. 1) \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}, \text{ ч.т.д.}$$

$$2) 1 + \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{4 \operatorname{tg}^2 \alpha + (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{4 \cos^4 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

$$3) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \\ = \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}, \text{ ч.т.д.}$$

4) Аналогично 3).

$$1135. 1) 4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \sin 3x. \text{ Решение: преобразуем левую}$$

$$\text{часть: } 4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = 2 \sin x \left(\cos 2x - \cos \frac{2\pi}{3} \right) =$$

$$= 2 \sin x \left(1 - 2 \sin^2 x + \frac{1}{2} \right) = 2 \sin x \left(\frac{3}{2} - 2 \sin^2 x \right) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x. \text{ Преобразуем}$$

$$\text{правую часть: } \sin 3x = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = 2 \sin x \cos^2 x + \sin x (1 - 2 \sin^2 x) = \\ = 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \text{ ч.т.д.}$$

2) Указание: домножьте и разделите числитель и знаменатель на $8 \sin 3x$ и воспользуйтесь формулой синуса двойного угла.

2. Уравнения

1136. 1) $\frac{3x-16}{12} + 1 = \frac{x+6}{4} - \frac{x+3}{6}$. Решение: умножим обе части уравнения на 12: $3x-16+12 = 3x+18-2x-6$; $2x = 16$, $x = 8$. Ответ: $x = 8$.

2) $\frac{5}{3}(x-7) - 3x - \frac{6(x-8)}{7} = -\left(x + \frac{43}{3}\right)$. Решение: раскроем скобки:
 $\frac{5}{3}x - \frac{35}{3} - 3x - \frac{6}{7}x + \frac{48}{7} = -x - \frac{43}{3}$; $\frac{5}{3}x - 3x - \frac{6}{7}x + x = -\frac{43}{3} + \frac{35}{3} - \frac{48}{7}$;
 $-\frac{25}{21}x = -\frac{200}{21}$, откуда $x = 8$. Ответ: $x = 8$.

1137. При каком значении a уравнение $a(x-3)+8=13(x+2)$ имеет корень, равный 0? Решение: подставим $x = 0$, тогда $-3a+8=26$; $a = -6$.
 Ответ: $a = -6$.

1138. При каком значении b уравнение $1-b(x+4)=2(x-8)$ имеет корень, равный 1? Решение: подставим $x = 1$, тогда $1-5b=-14$, откуда $b = 3$.
 Ответ: $b = 3$.

1139. 1) $x(x+1)-(x+2)(x+3)+9 = x(x+4)-(x+5)(x+2)$. Решение: раскроем скобки: $x^2+x-x^2-5x-6+9 = x^2+4x-x^2-7x-10$; $-x = -13$, $x = 13$.
 Ответ: $x = 13$.

2) $2(x+3)(x+1)+8 = (2x+1)(x+5)$. Решение: раскроем скобки, тогда:
 $2x^2+6x+2x+6+8 = 2x^2+x+10x+5$; $3x = 9$, $x = 3$. Ответ: $x = 3$.

1140. 1) $\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{4}{x^2-9}$. Решим: перенесем все в левую часть и приведем к общему знаменателю: $\frac{3x-9-2x-6-4}{x^2-9} = 0$; $\frac{x-19}{x^2-9} = 0$, откуда $x = 19$. Ответ: $x = 19$.

2) $\frac{5}{x-2} + \frac{2}{x-4} = \frac{11}{x^2-6x+8}$. Решение: перенесем все в левую часть и приведем к общему знаменателю: $\frac{5(x-4)+2(x-2)-11}{(x-2)(x-4)} = 0$;
 $\frac{7x-35}{(x-2)(x-4)} = 0$, откуда $x = 5$. Ответ: $x = 5$.

1141. 1) $(a-b)x = a^2 + (a+b)x$. Решение: преобразуем уравнение:
 $(a-b)x - (a+b)x = a^2$; $-2bx = a^2$, при $b \neq 0$ $x = -\frac{a^2}{2b}$. Если $b = 0$ и $a \neq 0$, тогда решений нет, а если $b = 0$ и $a = 0$, то решение – любое вещественное

число. Ответ: $b \neq 0$, a – любое, $x = -\frac{a^2}{2b}$; $b = 0$, $a \neq 0$ решений нет; $a = 0$, $b = 0$, x – любое.

2) $a^2x = a + b + b^2x$. Решение: преобразуем уравнение: $(a^2 - b^2)x = a + b$;
 $x = \frac{a+b}{a^2 - b^2}$; $x = \frac{1}{a-b}$. Ответ: если $a = -b$, x – любое; если $a = b \neq 0$ решений нет; если $a \neq |b|$, $x = \frac{1}{a-b}$.

1142. 1) $x^2 - 2x - 15 = 0$. Решение: по формуле корней квадратного уравнения: $x_1 = -3$, $x_2 = 5$. Ответ: $x_1 = -3$, $x_2 = 5$.

2) $3x^2 + 4x - 4 = 0$. Решение: по формуле корней квадратного уравнения: $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{2}{3}$. Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

1143. 1) $(x-3)(x-2) = 6(x-3)$. Решение: заметим, что $x = 3$ – корень. Если $x \neq 3$, то разделим обе части на $x-3 \neq 0$, тогда $x-2 = 6$, откуда $x = 8$.
 Ответ: $x = 3$, $x = 8$.

2) $x^2 - \frac{11x}{6} + \frac{1}{2} = 0$. Решение: умножим уравнение на 6: $6x^2 - 11x + 3 = 0$, тогда $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$. Ответ: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

1144. $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = 0$. Решение: О.О.У. $x \neq \pm 1$. Домножим обе части уравнения на $(x+1)(x-1) \neq 0$, тогда $x(x-1) + x(x+1) = 0$; $2x^2 = 0$, откуда $x = 0$.
 Ответ: $x = 0$.

2) Аналогично 1).

1145. 1) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{7}{2+x} = \frac{7x^2-28}{x^2-4} + \frac{18}{2-x}$. Решение: О.О.У. $x \neq \pm 2$. Домножим уравнение на $x^2 - 4 \neq 0$: $(3x-8)(x-2) - 7x^2 + 28 + 18(x+2) = 0$;
 $x^2 - x - 20 = 0$, отсюда $x = 5$, $x = -4$. Ответ: $x = 5$, $x = -4$.

2) $\frac{x+1}{x+3} - \frac{12}{x^2-9} = \frac{2-x}{3-x}$. Решение: О.О.У. $x \neq \pm 3$. Домножим уравнение на $x^2 - 9 \neq 0$: $(x+1)(x-3) - 12 + (2-x)(x+3) = 0$; $-3x - 9 = 0$, отсюда $x = -3$ (не удовлетворяет О.О.). Ответ: корней нет.

1146. $\frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^3+1}$. Решение: О.О.У. $x \neq -1$. При $x \neq -1$ домножим обе части уравнения на $x^3 + 1 \neq 0$. Тогда $2(x+1) - (x^2 - x + 1) = 2x - 1$;

$-x^2 + x + 2 = 0$, откуда $x = -1$ (не удовлетворяет ООУ) и $x = 2$. Ответ: $x = 2$.

1147. 1) Указание: домножьте уравнение на $x \neq 0$.

2) Указание: домножьте уравнение на $x + 2 \neq 0$.

1148. 1) $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$. Решение: сделаем замену $u = x^2$, тогда

$u^2 - 11u + 30 = 0$, откуда $u = 5$, $u = 6$. Т.е. $x = \pm\sqrt{5}$ и $x = \pm\sqrt{6}$.

Ответ: $x = \pm\sqrt{5}$, $x = \pm\sqrt{6}$.

2) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$. Решение: сделаем замену $u = x^2$, тогда

$2u^2 - 5u + 2 = 0$, откуда $u = 2$, $u = \frac{1}{2}$. Т.е. $x = \pm\sqrt{2}$ и $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1149. 1) Указание: сделайте замену $u = x^{-1}$, тогда $u^2 = x^{-2}$.

2) $(x^2 - x)^2 + 12 = 8(x^2 - x)$. Решение: сделаем замену $x^2 - x = u$, тогда $u^2 - 8u + 12 = 0$, откуда $u = 2$ или $u = 6$. Из уравнения $x^2 - x = 2$ находим

корни $x = -1$ и $x = 2$, а из уравнения $x^2 - x = 6$ корни $x = 3$ и $x = -2$.

Ответ: $x = -1$, $x = -2$, $x = 2$, $x = 3$.

1150. 1) Указание: $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - b^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - b^2 = \left(x + \frac{a}{2} - b\right)\left(x + \frac{a}{2} + b\right)$.

2) $\frac{2x}{2x-a} - \frac{x}{2x+a} = \frac{5a^2}{4x^2 - a^2}$. Решение: О.О.У. $x \neq \pm\frac{a}{2}$. Приведем все к

общему знаменателю: $\frac{2x(2x+a) - x(2x-a) - 5a^2}{(2x-a)(2x+a)} = 0$; $\frac{2x^2 + 3ax - 5a^2}{(2x-a)(2x+a)} = 0$;

$\frac{(x-a)(2x+5a)}{(2x-a)(2x+a)} = 0$. Откуда $x = a$ или $x = -2,5a$. При $a \neq 0$ оба корня удовлетворяют области определения, при $a = 0$ оба корня посторонние.

Ответ: при $a \neq 0$ $x = a$, $x = -2,5a$; при $a = 0$ решений нет.

1151. Указание: $ax^2 + bx + c = \begin{cases} \left(\sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}, & \text{при } a > 0 \\ -\left(\sqrt{-ax} - \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}, & \text{при } a < 0. \end{cases}$

1152. Решение: т.к. $a \neq 0$, то $x^2 + \frac{b}{a}x + 1 = 0$. Тогда по теореме Виета

$$x_1 \cdot x_2 = 1, \text{ т.е. } x_1 = \frac{1}{x_2}, \text{ ч.т.д.}$$

1153. 1) $|2x-3|=7$. Решение: по определению модуля $2x-3=7$ или $2x-3=-7$. Откуда $x=5$ или $x=-2$. Ответ: $x=5, x=-2$.

2) $|x+6|=2x$. Решение: т.к. левая часть неотрицательна, необходимо $x \geq 0$. Тогда, возведя обе части уравнения в квадрат, получим: $(x+6)^2 = 4x^2$; $3x^2 - 12x - 36 = 0$; $x^2 - 4x - 12 = 0$, откуда $x=6$ и $x=-2$ (не удовлетворяет условию $x \geq 0$). Ответ: $x=6$.

3) $2x-7=|x-4|$. Решение: т.к. правая часть неотрицательна, необходимо $2x-7 \geq 0$; $x \geq 3,5$. Тогда, возведя обе части уравнения в квадрат, получим: $4x^2 - 28x + 49 = x^2 - 8x + 16$; $3x^2 - 20x + 33 = 0$, откуда $x=3$ (не удовлетворяет условию $x \geq 3,5$) и $x=3\frac{2}{3}$. Ответ: $x=3\frac{2}{3}$.

1154. 1) Аналогично задаче 1153 п.3).

2) $2|x-2|=|x|-1$. Решение: перепишем уравнение в виде $2|x-2|+1=|x|$. Т.к. обе части положительны, возведем в квадрат, получим $4(x-2)^2 + 4|x-2| + 1 = x^2$; $3x^2 - 16x + 17 + 4|x-2| = 0$. При $x \geq 2$, $3x^2 - 16x + 17 + 4x - 8 = 0$; $3x^2 - 12x + 9 = 0$, откуда $x=1$ (не удовлетворяет условию $x \geq 2$) и $x=3$. При $x < 2$, $3x^2 - 16x + 17 - 4x + 8 = 0$; $3x^2 - 20x + 25 = 0$, откуда $x=5$ (не удовлетворяет условию $x < 2$) и $x=\frac{5}{3}$. Ответ: $x=\frac{5}{3}, x=3$.

1155. Указание: при $x \geq 0$ возведите обе части уравнения в квадрат, тогда

$$(x^2 - 3x - 6)^2 - 4x^2 = (x^2 - 5x - 6)(x^2 - x - 6).$$

1156. Указание: при $x \geq 0$ возведите обе части уравнения в квадрат, тогда

$$(x^2 - 8x + 5)^2 - 4x^2 = (x^2 - 10x + 5)(x^2 - 6x + 5).$$

1157. 1) $\sqrt{2x+7}=x+2$. Решение: О.О.У. $x \geq -3,5$. Т.к. левая часть неотрицательна, то уравнение имеет смысл только при $x \geq -2$. При таком условии возведем обе части уравнения в квадрат, получим: $2x+7=x^2+4x+4$; $x^2+2x-3=0$. Откуда $x=1$ и $x=-3$ (не удовлетворяет условию $x \geq -2$). Ответ: $x=1$.

2) Указание: перепишите уравнение в виде $\sqrt{2x-5}=2-x$. Аналогично 1).

1158. 1) $3^{x-7}=81$. Решение: преобразуем уравнение: $3^{x-7}=3^4$, тогда $x-7=4$, $x=11$. Ответ: $x=11$.

2) $2^{x^2-5x+6,5} = \sqrt{2}$. Решение: преобразуем уравнение: $2^{x^2-5x+6,5} = 2^{0,5}$, тогда $x^2 - 5x + 6,5 = 0,5$; $x^2 - 5x + 6 = 0$, откуда $x = 2$, $x = 3$.

Ответ: $x = 2$, $x = 3$.

3) $\left(\frac{1}{4} \cdot 4^x\right)^x = 2^{2x+6}$. Решение: преобразуем уравнение: $(4^{x-1})^x = 2^{2x+6}$; $(2^{2x-2})^x = 2^{2x+6}$; $2^{(2x-2)x} = 2^{2x+6}$, откуда $(2x-2)x = 2x+6$; $2x^2 - 4x - 6 = 0$. Тогда $x = -1$ и $x = 3$. Ответ: $x = -1$, $x = 3$.

1159. 1) $9^{5x} - 9^{5x-1} = 8$. Решение: преобразуем уравнение: $9 \cdot 9^{5x-1} - 9^{5x-1} = 8$; $8 \cdot 9^{5x-1} = 8$, откуда $9^{5x-1} = 1$, т.е. $5x - 1 = 0$, $x = 0,2$. Ответ: $x = 0,2$.

2) Указание: уравнение равносильно $2^x(2^4 - 1) = 120$; $2^x = 8$.

1160. 1) $5^{2x+5} \cdot 7^{3x+1} = 35^{\frac{1}{2}(5x+6)}$. Решение: разделим обе части уравнения на

$35^{\frac{1}{2}(5x+6)} \neq 0$, получим $\frac{5^{2x+5} \cdot 7^{3x+1}}{(5 \cdot 7)^{\frac{1}{2}(5x+6)}} = 1$. Т.е. $5^{2x+5-\frac{1}{2}(5x+6)} \cdot 7^{3x+1-\frac{1}{2}(5x+6)} = 1$;

$5^{-0,5x+2} \cdot 7^{0,5x-2} = 1$; $\left(\frac{7}{5}\right)^{0,5x-2} = 1$, откуда $0,5x - 2 = 0$, $x = 4$. Ответ: $x = 4$.

2) Указание: $0,2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$. Аналогично 1).

1161. 1) Указание: данное уравнение равносильно уравнению $3 - 2x = 3x - 2$.

2) Указание: $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-2}$, данное уравнение равносильно уравнению $x = 2 - x$.

3) $\frac{1}{\sqrt{8}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{-x}$. Решение: $\sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}}$, $\frac{1}{16} = 2^{-4}$, таким образом $2^{-\frac{3}{2}} = 2^{4x}$, откуда $-\frac{3}{2} = 4x$; $x = -\frac{3}{8}$. Ответ: $x = -\frac{3}{8}$.

1162. 1) Указание: $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3(1-x)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}$.

2) Указание: $\sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[3]{3^x} = 2^{\frac{x}{3}} \cdot 3^{\frac{x}{3}} = 6^{\frac{x}{3}}$.

1163. 1) Указание: уравнение равносильно $5^{x-1}(5^2 + 5 + 1) = 155$; $5^{x-1} = 5$.

2) Указание: уравнение равносильно $3^{2x-1} \left(3 - 2 - 2 \cdot \frac{1}{3}\right) = 1$.

3) Указание: уравнение равносильно $7^{x-1}(7-1) = 6$; $7^{x-1} = 1$.

4) Указание: уравнение равносильно $3^x(3^2 + 1) = 10$; $3^x = 1$.

1164. 1) Указание: сделайте замену $u = 3^x$, тогда $u^2 - u = 72$.

2) Указание: сделайте замену $u = 2^x$, тогда $u^2 - 2u = 48$.

1165. 1) Указание: сделайте замену $u = \log_2 x$, тогда $u^2 - 3u + 2 = 0$.

2) Указание: сделайте замену $u = \log_3 x$, тогда $u^2 + 5 = 2 \cdot 3u$.

1166. 1) $\ln \frac{2}{x+1} = \ln(x+2)$. Решение: О.О.У. $x > -1$. Преобразуем уравнение:

$$\ln \frac{2}{x+1} - \ln(x+2) = 0; \quad \ln \frac{2}{(x+1)(x+2)} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{2}{(x+1)(x+2)} = 1. \quad \text{Откуда}$$

$x^2 + 3x + 2 = 2, x = 0$ и $x = -3$ (не удовлетворяет О.О.). Ответ: $x = 0$.

2) $\log_3 \sqrt{3x-6} - \log_3 \sqrt{x-3} = 1$. Решение: О.О.У. $3x-6 \geq 0, x-3 \geq 0$, т.е.

$$x \geq 3. \quad \text{Преобразуем уравнение: } \log_3 \frac{\sqrt{3x-6}}{\sqrt{x-3}} = \log_3 3; \quad \log_3 \frac{3x-6}{x-3} = 2 \log_3 3,$$

т.е. $\frac{3x-6}{x-3} = 9, 6x = 21, x = 3,5$. Ответ: $x = 3,5$.

1167. 1) Указание: О.О.У. $x > 0$, тогда уравнение равносильно $\frac{1}{2} + x = \frac{1}{2x}$.

2) Указание: О.О.У. $0 < x < \sqrt{6}$, тогда уравнение равносильно $x^2 = 6 - x^2$.

1168. 1) $\log_2(2x-18) + \log_2(x-9) = 5$. Решение: О.О.У. $x > 9$, тогда

$$\log_2(2x-18)(x-9) = 5; \log_2 2(x-9)^2 = 5; 1 + 2\log_2(x-9) = 5; \log_2(x-9) = 2.$$

Отсюда находим $x-9 = 4, x = 13$. Ответ: $x = 13$.

2) Аналогично 1).

1169. 1) $5^{\log_3 x^2} - 6 \cdot 5^{\log_3 x} + 5 = 0$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Сделаем замену

$$u = 5^{\log_3 x} > 0, \quad \text{тогда } 5^{\log_3 x^2} = 5^{2\log_3 x} = (5^{\log_3 x})^2 = u^2. \quad \text{Откуда } u^2 - 6u + 5 = 0,$$

т.е. $u = 5$ и $u = 1$. Тогда $5^{\log_3 x} = 5$ или $5^{\log_3 x} = 1$, т.е. $\log_3 x = 1$ или $\log_3 x = 0$, откуда $x = 3$ или $x = 1$. Ответ: $x = 3, x = 1$.

2) Указание: сделайте замену $5^{\log_3 x} = u$, тогда уравнение примет вид $u^2 - 20u - 125 = 0$.

1170. 1) $x^{\lg x} = 10$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Возьмем десятичный логарифм от

правой и левой части, тогда $\lg x^{\lg x} = \lg 10; \lg x \lg x = 1$, откуда $\lg x = 1$ или $\lg x = -1$. Т.е. $x = 10$ или $x = 0,1$. Ответ: $x = 10, x = 0,1$.

2) Указание: при $x > 0$ возьмите логарифм по основанию 3 от обеих час-

той уравнения, тогда $\log_3^2 x = 2 + \log_3 x$. Это уравнение квадратное относительно $\log_3 x$.

3) $x^{\lg x} - 1 = 10(1 - x^{-\lg x})$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Возьмем десятичный логарифм от обеих частей равенства, получим $\lg(x^{\lg x} - 1) = \lg 10 \left(\frac{x^{\lg x} - 1}{x^{\lg x}} \right)$; $\lg(x^{\lg x} - 1) = 1 + \lg(x^{\lg x} - 1) - \lg x^{\lg x}$; $\lg^2 x = 1$, откуда (аналогично п.1) $x = 10$ или $x = 0,1$. Ответ: $x = 10$; $x = 0,1$.

4) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Возьмем натуральный логарифм от правой и левой частей, получим $\ln x^{\sqrt{x}} = \ln \sqrt{x^x}$; $\sqrt{x} \ln x = \frac{1}{2} \ln x^x$; $2\sqrt{x} \ln x = x \ln x$. Если $\ln x = 0$, то уравнение выполнено, т.е. $x = 1$ – решение. Если $\ln x \neq 0$, то разделим обе части уравнения на $\ln x$, получим $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$; $x = \frac{x^2}{4}$, откуда $x = 0$ (не удовлетворяет области определения) и $x = 4$. Ответ: $x = 1, x = 4$.

1171. 1) Указание: разделите обе части уравнения на $49^{x^2} \neq 0$ и сделайте замену $u = \left(\frac{2}{7}\right)^{x^2}$. Уравнение примет вид $7u^2 - 9u + 2 = 0$.

2) Указание: разделите обе части уравнения на $5^{x+3} \neq 0$, тогда $5 + 3\left(\frac{4}{5}\right)^{x+3} = 4\left(\frac{4}{5}\right)^{x+3} + 4$, откуда $\left(\frac{4}{5}\right)^{x+3} = 1$.

1172. 1) $\log_4(2 + \sqrt{x+3}) = 1$. Решение: О.О.У. $x \geq -3$. Тогда уравнение равносильно $2 + \sqrt{x+3} = 4$, откуда $\sqrt{x+3} = 2$, $x + 3 = 4$; $x = 1$. Ответ: $x = 1$.

2) Указание: уравнение равносильно $-\frac{1}{2} \log_3(x^2 - 2x) = -\frac{1}{2}$; $x^2 - 2x = 3$.

3) $\frac{1}{2} \log_3(x+1) = \log_3 \sqrt{x+4} - 2 \log_3 \sqrt{2}$. Решение: О.О.У. $\begin{cases} x > -1 \\ x > -4 \end{cases}$, откуда $x > -1$. Тогда уравнение равносильно $\log_3 \sqrt{x+1} - \log_3 \sqrt{x+4} = \log_3 \frac{1}{2}$,

$\log_3 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}} = \log_3 \frac{1}{2}$, откуда $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{2}$, $\frac{x+1}{x+4} = \frac{1}{4}$, $4x + 4 = x + 4$, $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

1173. 1) $x^{1+\lg x} = 10x$. Решение: перепишем уравнение в виде $x \cdot x^{\lg x} = 10x$.

Заметим, что $x = 0$ – корень. При $x \neq 0$ разделим обе части на x , получим

$$x^{\lg x} = 10, \text{ т.е. } x = 10, x = 0,1 \text{ (см. задачу 1170 п.1).}$$

Ответ: $x = 0, x = 10, x = 0,1$.

2) Аналогично задаче 1170 п.1).

3) $\log_2(17-2^x) + \log_2(2^x+15) = 8$. Решение: сделаем замену переменной:

$u = 2^x$, тогда О.О.У. $-15 < u < 17$ и уравнение равносильно уравнению

$$\log_2(17-u)(u+15) = \log_2 2^8, \quad (17-u)(u+15) = 256, \quad -u^2 + 2u + 255 = 256,$$

$$u^2 - 2u + 1 = 0, \text{ откуда } u = 1. \text{ Т.е. } 2^x = 1, x = 0. \text{ Ответ: } x = 0.$$

4) Указание: сделайте замену $u = 2^x > 0$. Аналогично 3).

1174. Могут ли корни уравнения $(x-m)(x-n) = k^2$ быть чисто мнимыми, если m, n и k – действительные числа? Решение: преобразуем уравнение:

$$x^2 - x(m+n) - (mn+k^2) = 0, \text{ тогда его корни имеют вид}$$

$$x_{1,2} = \frac{(m+n) \pm \sqrt{(m+n)^2 - 4(mn+k^2)}}{2}. \text{ Для того, чтобы корни были мни-}$$

мые необходимо и достаточно $\begin{cases} m+n=0 \\ (m+n)^2 - 4(mn+k^2) < 0 \end{cases}, \begin{cases} m=-n \\ -4(k^2-n^2) < 0 \end{cases},$

$$\begin{cases} m=-n \\ k^2-n^2 > 0 \end{cases}. \text{ Ответ: } m=-n, k^2 > n^2.$$

1175. 1) $z^2 + 4z + 19 = 0$. Решение: по формуле корней квадратного уравне-

$$\text{ния } z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4 \cdot 19}}{2} = -2 \pm \sqrt{-15} = -2 \pm i\sqrt{15}. \text{ Ответ: } z_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{15}.$$

2) $z^2 - 2z + 3 = 0$. Решение: по формуле корней квадратного уравнения

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 3}}{2} = 1 \pm \sqrt{-2} = 1 \pm i\sqrt{2}. \text{ Ответ: } z_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}.$$

1176. 1) См. рис. 190;

2) См. рис. 191;

3) См. рис. 192;

4) См. рис. 193;

5) См. рис. 194;

6) См. рис. 195.

1177. Аналогично задаче 1 §40.

1178. 1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$. Решение $2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

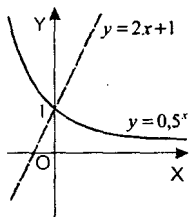


Рис. 190

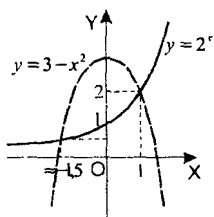


Рис. 191

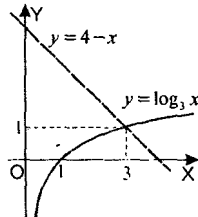


Рис. 192

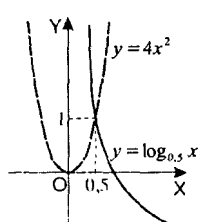


Рис. 193

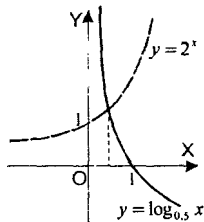


Рис. 194

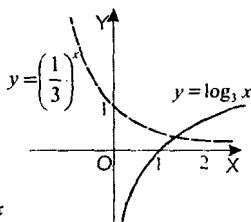


Рис. 195

2) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение $3x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $x = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $2 \operatorname{tg} x + 5 = 0$. Решение $\operatorname{tg} x = -\frac{5}{2}$; $x = -\operatorname{arctg} \frac{5}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = -\operatorname{arctg} \frac{5}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

1179. 1) Указание: уравнение является квадратным относительно $\cos x$.

2) Указание: уравнение является квадратным относительно $\operatorname{tg} x$.

1180. 1) Указание: уравнение равносильно совокупности:
$$\begin{cases} \sin x = \frac{3}{4} \\ \cos x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

2) Указание: уравнение равносильно совокупности:
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -3 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases}$$

1181. 1) $\sin 2x = 3 \sin x \cos^2 x$. Решение: преобразуем уравнение, получим:

$$\sin 2x - \frac{3}{2} \sin 2x \cos x = 0, \quad \sin 2x \left(1 - \frac{3}{2} \cos x \right) = 0, \quad \text{откуда } \sin 2x = 0 \text{ или}$$

$$\cos x = \frac{2}{3}. \quad \text{Т.е. } x = \frac{\pi k}{2}, \quad x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi k}{2}, \quad x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

2) Указание: преобразуйте уравнение:

$$2 \sin 2x \cos 2x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x); \quad \cos 2x(2 \sin 2x - 1) = 0.$$

3) Указание: преобразуем уравнение: $\cos 2x + \cos^2 x = 0$; $3 \cos^2 x - 1 = 0$.

4) Указание: преобразуйте уравнение:

$$2 \sin x \cos x - \cos^2 x = \cos x(2 \sin x - \cos x) = 0.$$

1182. 1) Указание: преобразуйте уравнение: $2 \sin x \cos x - 3 \cos x = 0$;
 $\cos x(2 \sin x - 3) = 0$.

2) Указание: уравнение равносильно $2 \sin 2x \cos 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot 1$;
 $2 \sin 2x \cos 2x = \cos 2x$.

3) Указание: уравнение равносильно $\cos^2 x - \sin^2 x = 4 \sin 2x$;
 $\cos 2x = 4 \sin 2x$.

4) Указание: уравнение равносильно $2 \cos x - 2 \sin x + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$;
 $(\cos x - \sin x)(2 + \cos x + \sin x) = 0$.

1183. 1) Указание: воспользуйтесь формулой суммы косинусов.

2) Указание: воспользуйтесь формулой разности косинусов.

3) Указание: $\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos x$.

4) Указание: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = \sin 2x(2 \cos x + 1)$.

1184. 1) Указание: уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = -2$.

2) Указание: уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

1185. 1) $4 \sin^4 x + \sin^2 2x = 2$. Решение: преобразуем уравнение:

$$4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x = 2; \quad 2 \sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 2; \quad \sin^2 x = 1, \quad \cos^2 x = 1,$$

откуда $x = \pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{2x}{3}$.

1186. 1) Указание: $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)$.

2) Указание: $6\sin x + 5\cos x = \sqrt{36+25}\sin(x+\varphi)$, где $\cos\varphi = \frac{6}{\sqrt{61}}$,
 $\sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{61}}$.

1187. 1) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 2 = 0$. Решение: сделаем замену $u = \operatorname{tg} x$, тогда
 $u^3 + u^2 - 2u - 2 = 0$, $(u^2 - 2)(u + 1) = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{2}$. Тогда
 $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \pm\arctg\sqrt{2} + \pi k$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \pm\arctg\sqrt{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: $1 - \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x$, $(1 - \cos x)\cos x = \sin x(1 - \cos x)$, откуда $\cos x = 1$ или $\cos x = \sin x$.

1188. 1) $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$. Решение: преобразуем уравнение:
 $\sin x + 2\sin x \cos x - \cos x - 2\cos^2 x = (\sin x - \cos x)(1 + 2\cos x)$. Тогда $\operatorname{tg} x = 1$
или $\cos x = -\frac{1}{2}$, т.е. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: уравнение равносильно: $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sqrt{6}(\cos x - \sin x)$;
 $(\cos x - \sin x)(2\cos x + 2\sin x - \sqrt{6}) = 0$; $(\cos x - \sin x)\left(2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{6}\right) = 0$.

1189. $\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = \cos x + \sin x$. Решение: преобразуем уравнение:

$$\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x - \sin x)^2} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}, \text{ тогда } \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x.$$

Если $\cos x = -\sin x$, то это решение, тогда $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Иначе $\frac{1}{\cos x - \sin x} = 1$, тогда $\cos x - \sin x = 1$, $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, откуда

$x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

1190. 1) Указание: $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 0$.

2) Указание: $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2\sin^2 x + 4\sin^2 x \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$;

$$4 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \cos^2 x = 0, \quad 2 \cos^2 x (2 \sin^2 x - 1) = 0.$$

3) Указание: $8 \sin x \cos 2x \cos x = 4 \sin 2x \cos 2x = 2 \sin 4x$.

4) Указание: $4 \sin x \cos x \cos 2x = 2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x$.

1191. 1) $\sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x = \cos 2x$. Решение: преобразуем уравнение:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \cos 2x, \text{ тогда } 2 \cos^2 x = 0,$$

т.е. $\cos x = 0$, $x = \pi k + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pi k + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: преобразуйте уравнение: $2 \sin^2 x - 1 = \cos^4 x - \sin^4 x$, $-\cos 2x = \cos 2x$, см. 1).

1192. 1) Указание: $\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x = \cos x \sin x (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x$,

откуда $\operatorname{tg} 2x = 2$.

2) Указание: разделите обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, тогда

$$\frac{2}{\cos^2 x} = 2(1 + \operatorname{tg}^2 x). \text{ Сделайте замену } u = \operatorname{tg} x.$$

1193. 1) Указание: разделите обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, тогда

$$\frac{3}{\cos^2 x} = 3(1 + \operatorname{tg}^2 x). \text{ Сделайте замену } u = \operatorname{tg} x.$$

2) Указание: разделите обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, тогда

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x. \text{ Сделайте замену } u = \operatorname{tg} x.$$

1194. 1) Указание: $\sin 5x - \sin 3x = 2 \sin x \cos 4x$, аналогично 4).

2) Указание: $\cos 6x + \cos 2x = 2 \cos 4x \cos 2x$.

3) Аналогично 4).

4) $\sin x = \cos 5x$. Решение: преобразуем уравнение:

$$\sin x - \cos 5x = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0. \text{ Тогда}$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ или } \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0, \text{ откуда } 3x - \frac{\pi}{4} = \pi k, \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3} \text{ и}$$

$$\frac{\pi}{4} - 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}. \text{ Ответ: } x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, \quad x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

1195. 1) Указание: $\sin x + \sin 5x = 2 \sin 3x \cos 2x$.

2) Указание: $\cos 7x - \cos 3x = -2 \sin 5x \sin 2x$.

1196. Указание: преобразуйте произведение в сумму.

1197. 1) Указание: $5 + \sin 2x = 4 + (\sin x + \cos x)^2$, замените $u = \sin x + \cos x$,

уравнение примет вид $4 + u^2 = 5u$.

2) Указание: преобразуйте уравнение: $2 - 3 \sin x \cos x + 2(\cos x - \sin x) = 0$.

Сделайте замену $u = \cos x - \sin x$; $2 - 3 \frac{1-u^2}{2} + 2u = 0$.

1198. 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$. Решение: преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} (\sin x + \sin 4x) + (\sin 2x + \sin 3x) &= 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{5x}{2} \cdot 2 \cos 2x \cos x. \quad \text{Т.е.} \quad \sin \frac{5x}{2} = 0, \end{aligned}$$

$$\cos 2x = 0 \text{ или } \cos x = 0. \text{ Ответ: } x = \frac{2\pi k}{5}, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{5}, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

2) Аналогично 1).

1199. 1) $\operatorname{tg}^2 3x - 4 \sin^2 3x = 0$. Решение: О.О.У. $\cos^2 3x \neq 0$, т.е. $\cos^2 3x \neq 1$.

$$\text{Преобразуем уравнение } \frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x} - 4 \sin^2 3x = 0, \quad \sin^2 3x \left(\frac{1}{\cos^2 3x} - 4 \right) = 0,$$

откуда $\sin 3x = 0$ или $\cos 3x = \pm \frac{1}{2}$. Тогда $3x = \pi k$ или $3x = \frac{\pi}{3} + \pi k$.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi k}{3}, x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

2) Указание: преобразуйте уравнение $\sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \cos x + \frac{\sin x}{\cos x}$,

$$\sin^2 x = \cos^2 x + \sin x, \quad 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

3) Указание: домножим обе части уравнения на $\sin x \neq 0$, получим $\operatorname{ctg} x (\cos x + \sin x) = 1$, аналогично 4).

4) $4 \operatorname{ctg}^2 x = 5 - \frac{9}{\sin x}$. Решение: так как $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, то

$$\frac{4}{\sin^2 x} - 4 = 5 - \frac{9}{\sin x}, \quad \frac{4}{\sin^2 x} + \frac{9}{\sin x} - 9 = 0. \text{ Откуда } \frac{1}{\sin x} = -3, \quad \frac{1}{\sin x} = \frac{3}{4}.$$

Второе уравнение не имеет смысла, а из первого уравнения $\sin x = -\frac{1}{3}$,

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Ответ: } x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

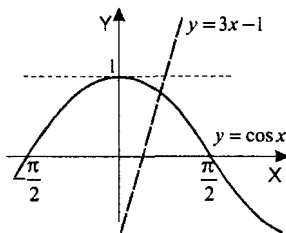


Рис. 196

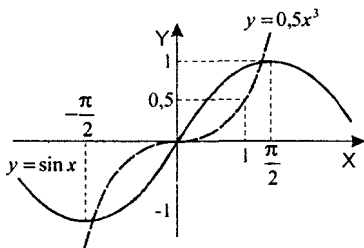


Рис. 197

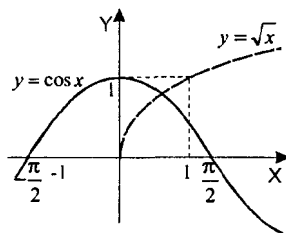


Рис. 198

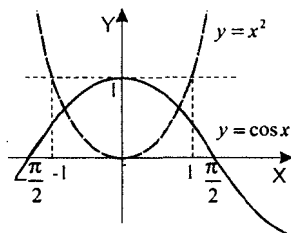


Рис. 199

1200. 1) Указание: уравнение равносильно $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 3 \operatorname{tg} x$.

2) Указание: уравнение равносильно $\frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{\operatorname{ctg} x} = 2 \operatorname{ctg} x$.

3) Указание: воспользуйтесь формулами тангенса суммы и разности.

4) $\operatorname{tg}(2x+1)\operatorname{ctg}(x+1)=1$. Решение: преобразуем уравнение, получим:

$$\operatorname{tg}(2x+1) = \operatorname{tg}(x+(x+1)) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x+1)}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+1)}, \text{ тогда } \frac{(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x+1))\operatorname{ctg}(x+1)}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+1)} = 1,$$

$$\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{ctg}(x+1) + 1}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+1)} = 1, \operatorname{tg} x \operatorname{ctg}(x+1) + 1 = 1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+1),$$

$\operatorname{tg} x (\operatorname{ctg}(x+1) + \operatorname{tg}(x+1)) = 0$. Выражение в скобках не обращается в нуль,

т.е. $\operatorname{tg} x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

1201. 1) См. рис. 196;

2) См. рис. 197;

3) См. рис. 198;

4) См. рис. 199.

3. Неравенства

1202. Аналогично задаче 1203.

1203. 1) $\frac{4-3x}{8} - \frac{5-2x}{12} < 2$. Решение: $\frac{1}{2} - \frac{3}{8}x - \frac{5}{12} + \frac{1}{6}x < 2$, $\frac{5}{24}x > -\frac{23}{12}$,
 $x > -\frac{23}{12} \cdot \frac{24}{5} = -9,2$. Ответ: $x > -9,2$.

2) Аналогично 1),

1204. При каких значениях x положительна дробь:

1) $\frac{5x-4}{7x+5}$. Решение: необходимо решить неравенство $\frac{5x-4}{7x+5} > 0$. Решая методом интервалов, получаем $x < -\frac{5}{7}$, $x > \frac{4}{5}$. Ответ: $x < -\frac{5}{7}$, $x > \frac{4}{5}$.

2)–4) Аналогично 3).

1205. Аналогично задаче 1204.

1206. 1) $\frac{5x+4}{x-3} < 4$. Решение: $\frac{5x+4}{x-3} - 4 = \frac{5x+4-4x+12}{x-3} = \frac{x+16}{x-3}$, т.е.
 $\frac{x+16}{x-3} < 0$, откуда $-16 < x < 3$. Ответ: $-16 < x < 3$.

2), 3) Аналогично 1).

1207–1209. Указание: неравенства решаются методом интервалов.

1210. При каких значениях x выражение $\lg(x^2 + 8x + 15)$ не имеет смысла?

Решение: необходимо $x^2 + 8x + 15 \leq 0$, $(x+3)(x+5) \leq 0$. Решаем методом интервалов, находим $-5 \leq x \leq -3$. Ответ: $-5 \leq x \leq -3$.

1211. Указание: необходимо, чтобы $D > 0$, аналогично задаче 1213.1212. Указание: необходимо, чтобы $D < 0$, аналогично задаче 1213.

1213. При каком наибольшем целом значении x выражение $\frac{\frac{1}{2}x^2 + 3}{x^2 - 9x + 14}$ принимает отрицательные значения? Решение: необходимо решить неравенство

$\frac{\frac{1}{2}x^2 + 3}{x^2 - 9x + 14} < 0$, $\frac{\frac{1}{2}x^2 + 3}{(x-2)(x-7)} < 0$, откуда $2 < x < 7$. Наибольшее целое x , которое попадает в этот промежуток, $x = 6$. Ответ: $x = 6$.

1214. Аналогично задаче 1213.

1215. 1) $|2x-3| < x$. Решение: рассмотрим два случая: $x \geq 1,5$, тогда $2x-3 < x$

$x, x < 3$. Т.е. $1,5 \leq x < 3$. Если $x < 1,5$, то $3 - 2x < x$, откуда $x > 1$; окончательно $1 < x < 3$. Ответ: $1 < x < 3$.

2) Аналогично 1).

3) $|x^2 - 7x + 12| \leq 6$. Решение: т.к. обе части неравенства положительны, возведем неравенство в квадрат, получим: $(x^2 - 7x + 12)^2 - 36 \leq 0$, $(x^2 - 7x + 12 - 6)(x^2 - 7x + 12 + 6) \leq 0$, $(x^2 - 7x + 18)(x - 6)(x - 1) \leq 0$, откуда $1 \leq x \leq 6$. Ответ: $1 \leq x \leq 6$.

4)–6) Аналогично 3).

1216. Указание: воспользуйтесь свойством показательной функции.

1217. 1) Аналогично 2).

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|} > \frac{1}{27}$. Решение: $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|} > \left(\frac{1}{3}\right)^3$, тогда по свойству показательной функции $|x-2| < 3$. Т.е. $-3 < x-2 < 3$; $-1 < x < 5$. Ответ: $-1 < x < 5$.

1218. Аналогично задаче 1217.

1219. 1) $3^{x+1} \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} \geq \sqrt[3]{3}$. Решение: преобразуем неравенство: $3^{x+1} \cdot 3^{2x-1} \geq 3^{\frac{1}{3}}$, $3^{3x} \geq 3^{\frac{1}{3}}$. Тогда по свойству показательной функции

$$3x \geq \frac{1}{3}, x \geq \frac{1}{9}. \text{ Ответ: } x \geq \frac{1}{9}.$$

2) Указание: $3^{x+1} + 3^{x-1} = 3^{x-1}(3^2 + 1) = 10 \cdot 3^{x-1}$.

1220. 1) Указание: $2^{2x} - 4^{x-1} + 8^{\frac{2x}{3}} \cdot 2^{-4} = 2^{2x} - 2^{2x-2} + 2^{2x-4} =$
 $= 2^{2x-4}(2^4 - 2^2 + 1) = 13 \cdot 2^{2x-4}$.

2) Указание: $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x-2}$; $2^{x+2}(1-2-4) > 5^{x-2}(125-1)$;

$$\frac{2^{x+2}}{5^{x-2}} > -\frac{124}{5}.$$

1221. 1), 2) Указание: воспользуйтесь свойствами показательной функции. Аналогично 3).

3) $8,4^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}} < 1$. Решение: т.к. $8,4 > 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $\frac{x-3}{x^2+6x+11} < 0$, откуда $x < 3$ (т.к. $x^2 + 6x + 11 > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$). Ответ: $x < 3$.

4) Аналогично 5).

5) $3^{4-3x} - 35 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geq 0$. Решение: сделаем замену $u = 3^{2-3x} > 0$. Тогда

да $9u - \frac{35}{u} + 6 \geq 0$. Домножим обе части неравенства на $u > 0$, получим

$9u^2 + 6u - 35 \geq 0$. Откуда $u \leq -\frac{7}{3}$ (не удовлетворяет условию $u > 0$) и

$u \geq \frac{5}{3}$. Тогда $3^{2-3x} \geq \frac{5}{3}$, $2-3x \geq \log_3 \frac{5}{3}$, откуда $x \leq 1 - \frac{1}{3} \log_3 5$.

Ответ: $x \leq 1 - \frac{1}{3} \log_3 5$.

1222. 1) Указание: данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_2 \frac{x-1}{x+2} < -2.$$

2) Указание: данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_2 (x^2 - 4x + 3,5) > -1.$$

1223. 1) $\log_6 (2-x) < \log_6 (2x+5)$. Решение: О.О.Н. $-2,5 < x < 2$. Т.к. $6 > 1$, то неравенство равносильно $2-x < 2x+5$; $3x > -3$, $x > -1$. С учетом области определения $-1 < x < 2$. Ответ: $-1 < x < 2$.

2) Аналогично 1).

1224. 1) Указание: неравенство равносильно $0 \leq \lg x < \frac{1}{4}$.

2) Указание: на области определения неравенство равносильно

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{2x+6} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}.$$

1225. Аналогично задаче 1226.

1226. 1) $\lg_{0,5} (x^2 - 5x + 6) > -1$. Решение: область определения неравенства

$x^2 - 5x + 6 > 0$, т.е. $x < 2$, $x > 3$. Тогда по свойству логарифмической функции $x^2 - 5x + 6 < (0,5)^{-1}$, $x^2 - 5x + 6 < 2$, $x^2 - 5x + 4 < 0$, откуда $1 < x < 4$, с учетом ОО: $1 < x < 2$, $3 < x < 4$. Ответ: $1 < x < 2$, $3 < x < 4$.

2) Аналогично 1).

1227. 1) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{x-1} \right) \leq 0$. Решение: данное неравенство равносильно

неравенству $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{x-1} \geq 1$, откуда $0 < \frac{3x+1}{x-1} \leq \frac{1}{2}$. Т.е. $\frac{3x+1}{x-1} - \frac{1}{2} \leq 0$,

$\frac{6x+2-x+1}{2x-2} \leq 0$, $\frac{5x+3}{2x-2} \leq 0$, откуда $-\frac{3}{5} \leq x < 1$. Из неравенства

$\frac{3x+1}{x-1} > 0$ получаем $x > 1$ или $x < -\frac{1}{3}$. Окончательно $-\frac{3}{5} < x < -\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{3}{5} < x < -\frac{1}{3}$.

1228. 1) $(x^2 - 4) \log_{0.5} x > 0$. Решение: область определения неравенства

$x > 0$. Тогда необходимо $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ \log_{0.5} x > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ \log_{0.5} x < 0 \end{cases}$. Откуда $x < -2$ или

$1 < x < 2$. Ответ: $x < -2$, $1 < x < 2$.

2) Аналогично 1).

1229. 1) Указание: неравенство равносильно неравенству $(1 + \lg x) \lg x < 2$.

2) Указание: неравенство равносильно неравенству $2 \lg^2 x < 1 + \lg x$.

3) Указание: пусть $u = 3^x$, тогда $3 + \log_3 u > \log_3(26 + u)$.

4) Указание: пусть $u = 5^x$, тогда $3 - \log_5 u < \log_5(20 + u)$.

1230. Указание: воспользуйтесь формулами из §37.

1231. Аналогично задачам 716, 725, 737.

1232. Аналогично задачам 716, 725, 737.

1233. 1) Указание: $\frac{a^2 + b^2}{2} - ab = \frac{(a-b)^2}{2}$.

2) $\frac{a^3 + b^3}{2} > \frac{(a+b)^2}{2}$, если $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$. Решение: докажем неравен-

ство $\frac{a^3 + b^3}{2} - \frac{(a+b)^2}{2} > 0$. Произведем равносильные преобразования:

$$\frac{4a^3 + 4b^3 - a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{8} > 0, \quad \frac{3}{8}(a^3 - a^2b - ab^2 + b^3) > 0,$$

$(a-b)^2(a+b) > 0$, что верно по условию, ч.т.д.

1234. 1) Указание: $(a+b)(ab+1) - 4ab = b(a-1)^2 + a(b-1)^2$.

2) Указание: $a^4 + 6a^2b^2 + b^4 - 4ab(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2 - 2ab)^2 = (a-b)^4$.

1235. 1) Указание: из неравенства 1233 п.1) следует: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a}{b} + 2\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Докажите, что $\frac{a}{b} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} \geq 3$ (сделайте замену $u = \sqrt{\frac{b}{a}}$).

2) Указание: $2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b+c) = (a-b)^2 + (a-c)^2$.

4. Системы уравнений и неравенств

1236. 1)
$$\begin{cases} 5x - 7y = 3 \\ 6x + 5y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x - 35y = 15 \\ 42x + 35y = 119 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 67x = 134 \\ 6x + 5y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Решение: домножим первое уравнение системы на 5, второе на 7 и сложим. Ответ: (2; 1).

2)
$$\begin{cases} 2x - y - 13 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y - 26 = 0 \\ 2x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 25 = 0 \\ 5y + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

Решение: к первому уравнению, умноженному на 2, прибавим второе; а из второго, умноженного на 2, вычтем первое. Ответ: (5; -3).

1237. 1)
$$\begin{cases} \frac{x-y}{5} - \frac{x+y}{2} = 10 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) - 5(x+y) = 2x+5y \\ 2x+5y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+12y = 0 \\ 2x+5y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(100-5y) + 24y = 0 \\ x = \frac{100-5y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 500 \\ x = -1200 \end{cases}$$

Решение: приравняем левые части уравнений, умноженные на 10; второе уравнение системы умножим на 10. Ответ: (-1200; 500).

2)
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3} = 6 \\ \frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 6 \\ (x-y)\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 8 \\ x-y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

Решение: сложим уравнения системы; затем из первого уравнения, разделенного на 2 вычтем второе. Ответ: (7; 1)

$$1238. 1) \begin{cases} y+5 = x^2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y+5 \\ y+5 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y+5 \\ y^2 + y - 20 = 0, \end{cases}$$

отсюда $y_1 = -5$, $y_2 = 4$; $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 3$. Ответ: $(0; -5)$, $(3; 4)$, $(-3; 4)$.

$$2) \begin{cases} xy = 16 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 64 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 8 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

Решение: перемножим уравнения системы (получим $x^2 = 64$); затем разделим первое уравнение на второе (получим $y^2 = 4$). Заметим, что значения x и y должны иметь один знак. Ответ: $(8; 2)$, $(-8; -2)$.

$$3) \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 96 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + 2y^2 = 96 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 16 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{1,2} = \pm 4 \\ x = 2y \end{cases}$$

Решение: подставим $x = 2y$ в первое уравнение. Ответ: $(8; 4)$, $(-8; -4)$.

$$1239. 1) \begin{cases} x^2 - y^2 = 13 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 14 \\ 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \end{cases}$$

Решение: т.к. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, разделим первое уравнение на второе. Ответ: $(7; 6)$

$$2) \begin{cases} x^2 - 3y = -5 \\ 7x + 3y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 23 + 7x = -5 \\ 3y = 23 - 7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 7x - 18 = 0 \\ 3y = 23 - 7x \end{cases}$$

Решение: подставим $3y = 23 - 7x$ в первое уравнение. Тогда $x_1 = 2$, $x_2 = -9$. Ответ: $(2, 3)$, $(-9; 28\frac{2}{3})$.

$$1240. 1) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - \frac{1}{u} = \frac{3}{2} \\ u^2 + 1 = \frac{20}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2 - 3u - 2 = 0 \\ y^2 = \frac{20}{u^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2, u_2 = -\frac{1}{2} \\ y_1^2 = 4, y_2^2 = 16 \end{cases}$$

Решение: сделаем замену $u = \frac{x}{y}$; второе уравнение разделим на y^2 .

Ответ: $(4; 2)$, $(-4; -2)$, $(2; 4)$, $(-2; 4)$.

$$2) \begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{10}{3} \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + \frac{1}{u} = \frac{10}{3} \\ 1 - u^2 = \frac{8}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 - 10u + 3 = 0 \\ x^2 = \frac{8}{1-u^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3, u_2 = \frac{1}{3} \\ x_1^2 = -1, x_2^2 = 9 \end{cases}$$

Решение: сделаем замену $u = \frac{y}{x}$; второе уравнение разделим на x^2 . Т.к.

уравнение $x^2 = -1$ действительных корней не имеет, то $x = \pm\sqrt{9}$, тогда

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 8}. \text{ Ответ: } (3; 1), (-3; -1).$$

$$3) \begin{cases} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 9x - 9y \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-9) = 0 \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases}$$

Решение: рассмотрим разность уравнений системы, тогда полученная система равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x=y \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=9-y \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 17 \\ y_1 = 0, y_2 = 17 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = 12, x_2 = -3 \\ y_1 = -3, y_2 = 12 \end{cases}$$

Ответ: (0, 0); (17, 17); (12, -3); (-3, 12).

$$4) \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 4x = 40 \\ 2x^2 + y^2 + 3x = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x = -12 \\ y^2 = 52 - 2x^2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3, x_2 = 4 \\ y_1^2 = 25, y_2^2 = 8 \end{cases}$$

Решение: рассмотрим разность уравнений системы.

Ответ: (3, 5); (3, -5); (4, $2\sqrt{2}$); (4, $-2\sqrt{2}$).

$$1241. 1) \begin{cases} 2^{x+y} = 32 \\ 3^{3y-x} = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ 3y-x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ -5+3y+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Ответ: (3, 2).

$$2) \begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\frac{x}{2}} + 2^y = 11 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 3^{\frac{x}{2}} = 18 \\ 2 \cdot 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

Решение: т.к. $3^x - 2^{2y} = \left(3^{\frac{x}{2}} - 2^y\right) \left(3^{\frac{x}{2}} + 2^y\right)$, разделим первое уравнение

системы на второе. Ответ: (4, 1).

$$3) \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^{4+x} = 576 \\ y-x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x = 36 \\ y = 4+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$$

Ответ: (2, 6).

$$4) \begin{cases} \lg x + \lg y = 4 \\ x^{18y} = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg xy = 4 \\ \lg x^{18y} = \lg 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 10^4 \\ 41\lg x - \lg^2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10^4 : x \\ \lg x = 1 \text{ или } \lg x = 3 \end{cases}$$

Решение: О.О.С. $x > 0$, $y > 0$. Преобразовав систему получаем: $x_1 = 10$, $y_1 = 1000$; $x_2 = 1000$, $y_2 = 10$. Ответ: $(10, 10^3)$; $(10^3, 10)$.

$$1242. 1) \begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 \frac{x}{y^2} = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 = 1, y_2^2 = 4 \\ x_1 = 1, x_2 = 4 \end{cases}$$

Решение: О.О.С. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. С учетом области определения получаем: $y = 2$, $x = 4$ и $y = 1$, $x = 1$. Ответ: (1; 1), (4; 2).

$$2) \begin{cases} x^2 + y^4 = 16 \\ \log_2 x + 2\log_2 y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^4 = 16 \\ \log_2 xy^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{64}{x^2} = 16 \\ y^2 = \frac{8}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 8 \\ y^2 = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Решение: О.О.С. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. С учетом области определения получаем: $x = 2^{\frac{3}{2}}$

, $y = 2^{\frac{3}{4}}$. Ответ: $(2^{\frac{3}{2}}; 2^{\frac{3}{4}})$.

$$1243. 1) \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 16 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = 18 \\ 2\sqrt{y} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 9 \\ \sqrt{y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 81 \\ y = 49 \end{cases}$$

Решение: О.О.С. $x \geq 0$, $y \geq 0$. Сложим уравнения, затем вычтем из первого второе. Ответ: (81; 49).

$$2) \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = 20 \\ 2\sqrt{y} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 10 \\ \sqrt{y} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 81 \end{cases}$$

Решение: О.О.С. $x \geq 0$, $y \geq 0$. Сложим уравнения, затем вычтем из второго первое. Ответ: (100; 81).

$$1244. 1) \begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1 \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y+2 \\ \sqrt{2x} = 2+2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+2 \\ \sqrt{2x} = 2 \text{ или } \sqrt{2x} = -1 \end{cases}$$

Решение: возведем первое уравнение в квадрат. Подставим это во второе уравнение. Т.к. значение $\sqrt{2x} = -1$ невозможно, получаем решение $(2; 0)$. Т.к. мы не находили О.О.С., то необходимо сделать проверку, которая показывает, что решение – постороннее. Ответ: решений нет.

$$2) \begin{cases} \sqrt{3y+x+1} = 2 \\ \sqrt{2x-y+2} = 7y-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-3y \\ \sqrt{8-7y} = 7y-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-3y \\ 7y^2 - 11y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = \frac{21}{11} \\ y_1 = 1, y_2 = \frac{4}{11} \end{cases}$$

Решение: возведем в квадрат первое уравнение, выразим x через y и подставим во второе уравнение. Возведем второе уравнение в квадрат, получаем решения $(0; 1)$, $(\frac{21}{11}; \frac{4}{11})$. Проверка показывает, что второе решение – постороннее. Ответ: $(0; 1)$.

$$1245. 1) \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin^2 x + 2\sin x \cos y = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ (\sin x + \cos y)^2 = \frac{3}{4} + \cos^2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos^2 y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Решение: прибавим к обоим частям второго уравнения $\cos^2 y$ и подставим значение $\sin x + \cos y = 1$. Тогда получаем: $\cos y = \pm \frac{1}{2}$, $\sin x = \frac{1}{2}$ или

$\sin x = \frac{3}{2}$ (не имеет смысла).

Ответ: $y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi m$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

2) Указание: $\cos^2 x + 2\sin x \sin y + 4\cos^2 y = 1 - \sin^2 x + 2\sin x \sin y + 4 - 4\sin^2 y$.

Подставьте $\sin x = \frac{1}{2} - \sin y$ в преобразованное второе уравнение.

$$1246. 1) \begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2} \\ \frac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2} \\ \sin y \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Решение: О.О.С. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $y \neq \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Вычтем преобразованные уравнения, получим $\sin(x-y) = 0$, откуда $x-y = \pi k$. Если сложить урав-

нения, то $\sin(x+y) = -1$, откуда $x+y = 2\pi n - \frac{\pi}{2}$. Тогда
$$\begin{cases} x-y = \pi k \\ x+y = 2\pi n - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$x = \pi n + \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4}$, $y = \pi n - \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4}$ — удовлетворяет области определения.

Ответ: $\left(\pi n + \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4}; \pi n - \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$.

2) Аналогично 1).

$$1247. \begin{cases} \frac{2x-3}{2} - \frac{3x+5}{3} + \frac{x}{6} < 3 - \frac{x+4}{2} \\ 1 - \frac{2x-8}{3} + \frac{4-3x}{2} < 2x - \frac{x+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9-10-x < 18-3x-12 \\ 6-4x+28-9x < 12x-2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 25 \\ 23x > 38 \end{cases}$$

Тогда наименьшее целое решение системы $x = 2$, а наибольшее $x = 12$.

Ответ: $x = 2, x = 12$.

$$1248. \begin{cases} \frac{x+1}{5} - \frac{x+2}{4} < \frac{x-3}{3} + \frac{x-4}{2} \\ \frac{x-2}{3} > 1 + \frac{x-5}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+6}{20} > \frac{18-5x}{6} \\ 5x-10 > 10+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 53x > 162 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3\frac{3}{53} \\ x > 5 \end{cases}$$

Ответ: $x > 5$.

5. Текстовые задачи

1249. Решение: пусть l м — длина эскалатора, тогда скорость пассажира

$$\frac{l}{3} \text{ м/мин, а суммарная скорость пассажира и эскалатора } \frac{l}{\frac{45}{60}} = \frac{4l}{3} \text{ м/мин.}$$

Следовательно, скорость эскалатора равна $\frac{4l}{3} - \frac{l}{3} = l$ м/мин, т.е. неподвижно стоящий человек поднимется за 1 мин. Ответ: 1 мин.

1250. Решение: пусть v км/ч — скорость теплохода, тогда сго скорость по течению равна $v+2$ км/ч, а против течения $v-2$ км/ч. Соответственно, расстояние между пристанями равно $7 \cdot (v+2) = 9 \cdot (v-2)$. Т.е. $v = 16$ км/ч, тогда расстояние равно $v \cdot 7 \cdot (16+2) = 126$ км. Ответ: 126 км.

1251. Решение: пусть v км/ч – скорость парохода, S км – расстояние, тогда

$$v = \frac{S}{2,25 \cdot 24}, \text{ а } v + 2,5 = \frac{S}{2 \cdot 24}, \text{ откуда } \frac{S}{2 \cdot 24} - 2,5 = \frac{S}{2,25 \cdot 24}. \text{ Т.е. расстояние } S = 1080 \text{ км. Ответ: } 1080 \text{ км.}$$

1252. Решение: за один день оба рабочих вместе выполняют $\frac{1}{24} + \frac{1}{48}$ часть

работы. Следовательно всю работу они выполняют за $1 : \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{48} \right) = 16$ дн.

Ответ: 16 дней.

1253. Решение: пусть x га – площадь целинных земель, тогда $30x$ ц собрали с целинных земель, а с остальной площади – $22 \cdot (174 - x)$ ц. Следовательно $4556 = 30x + 22 \cdot (174 - x)$, откуда $x = 91$ га. Ответ: 91 га.

1254. Решение: пусть x и y – искомые числа, тогда необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{xy} = \frac{1}{24} \\ x+y = 5(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3/2 \cdot y - y}{3/2 y^2} = \frac{1}{24} \\ x = 3/2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24y = 3y^2 \\ x = 3/2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0, y_2 = 8 \\ x_1 = 0, x_2 = 12 \end{cases}$$

Решение $(0, 0)$ постороннее. Ответ: $(8, 12)$.

1255. Решение: необходимо решить систему уравнений (где $x, y, z \in \mathbf{Z}$):

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{z} + \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{2}{x} = \frac{6}{z} \\ \frac{2}{y} = \frac{4}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 \\ x = \frac{z}{3} \\ y = \frac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 \\ x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$.

1256. Решение: пусть бригада изготавливала x деталей в день, тогда намеченный срок равен $\frac{360}{x-9}$ дням. Следовательно $\frac{360}{x-9} - 1 = \frac{360 \cdot 1,05}{x}$. Отсюда

$x^2 + 9x - 3402 = 0$. т.е. $x_1 = -63$ (посторонний корень) и $x_2 = 54$. Значит к сроку бригада изготовит $\frac{360}{54-9} \cdot 54 = 432$ дет. Ответ: 432 детали.

1257. Указание: пусть v_x – скорость катера, v_n – скорость плота (реки).

Тогда необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{36}{v_x + v_n} = \frac{36}{v_n} + 10 \\ \frac{30}{v_x + v_n} + \frac{20}{v_x - v_n} = \frac{10}{v_n} \end{cases}$$

1258. Указание: пусть x – количество билетов, купленных первой организа-

цией, тогда $\frac{300}{x} - 3 = \frac{180}{x-5}$.

1259. Аналогично задаче 1257.

1260. Аналогично задаче 1253.

1261. Указание: пусть a – длина шага ученика в см., тогда $\frac{700}{a} = \frac{700}{a+20} + 400$.

1262. Указание: решите систему $\begin{cases} b_1 + 9 = b_1 q^2 \\ b_1 q^3 + 18 = b_1 q \end{cases}$.

1263. Указание: воспользуйтесь формулой $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

1264. Указание: по свойствам геометрической и арифметической прогрессий можно обозначить x , \sqrt{xy} , y , $2y - \sqrt{xy}$.

1265. Указание: по свойству арифметической прогрессии $b_1 q^4 + b_1 q^{10} = 2b_1 q^7$, откуда $1 + q^6 = 2q^3$.

1266. Указание: $\frac{(a_1 + 4d)(a_1 + 5d)}{a_1(a_1 + d)} = 33$, откуда можно найти $\frac{a_1}{d}$. Тогда

$$\frac{a_1 + 4d}{a_1 + d} = \frac{\frac{a_1}{d} + 4}{\frac{a_1}{d} + 1}$$

1267. Указание: площади треугольников образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$.

6. Функции и графики

1268. Указание: решите уравнение $y(-2) = 3$.

1269. Указание: решите уравнение $y(-1) = 4$.

1270. Найти коэффициенты k и b функции $y = kx + b$, если ее график проходит через точки A и B .

1) $A(-1; -2), B(3; 2)$. Решение: $\begin{cases} y(-1) = -2 \\ y(3) = 2 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} -k + b = -2 \\ 3k + b = 2 \end{cases}$, тогда, вычи-

тая из первого уравнения второе, находим $4k = 4; k = 1, b = -1$.

Ответ: $y = x - 1$.

2)–4) Аналогично 1).

1271. Указание: пусть уравнение прямой $y = kx + b$, тогда:

$$k = \frac{x_c - x_a}{y_c - y_a} = \frac{3 + 2}{0 - 2} = -2,5.$$

1272. Указание: подставьте координаты точки в уравнение прямой.

1273. 3) Указание: расстояние до начала координат равно длине высоты, опущенной на гипотенузу треугольника AOB .

1274. Указание: решите неравенство 1) $3x - 1 > 0$; 2) $3x - 1 < 0$.

1275. Указание: решите неравенство 1) $-2x + 1 > 0$; 2) $-2x + 1 < 0$.

1276. Указание: решите неравенство $2x - 1 < 3x - 2$.

1277. Указание: решите неравенство $(\sqrt{3} - 2)x - \sqrt{3} > (1 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3}$.

1278, 1279. Указание: найдите производную функции $y(x)$.

1280. 1) Ответ: нет; 2) Ответ: да.

1281. 1) См. рис. 200;

2) См. рис. 201;

3) См. рис. 202.

1282. Аналогично задаче 1283.

1283. Дана функция $y = -2x^2 + 3x + 2$.

1) Построить ее график и найти значения x , при которых $y(x) < 0$. Решение:

график функции – парабола с вершиной в точке $\left(\frac{3}{4}; \frac{31}{8}\right)$, оси направлены

вниз. $-2x^2 + 3x + 2 < 0$ при $x > 2$ или $x < -\frac{1}{2}$.

2) См. п.1).

3) См. п.1).

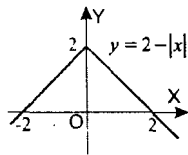


Рис. 200

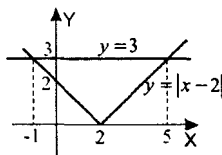


Рис. 201

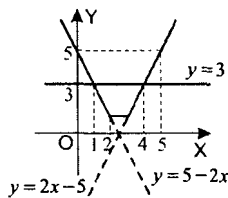


Рис. 202

4) Указание: решите неравенство $-2x^2 + 3x + 2 < 3x + 2$.

5) Записать уравнение касательных к параболе в точках с ординатой, равной 3. Решение: найдем абсциссу точки касания: $-2x^2 + 3x + 2 = 3$, откуда

$x_0 = 1$ или $x_0 = \frac{1}{2}$. Общий вид уравнения касательной в точке x_0 :

$y = y'(x)(x - x_0) + y(x_0)$, $y = (-4x_0 + 3)(x - x_0) + (-2x_0^2 + 3x_0 + 2)$, т.е. в

точке $x_0 = 1$ $y = -x + 4$, в точке $x_0 = \frac{1}{2}$ $y = x + 2,5$.

Ответ: $y = -x + 4$; $y = x + 2,5$.

1284. Выяснить, пересекаются ли графики функций:

1) $y = x^2$ и $y = x + 6$. Решение: решим уравнение $x^2 = x + 6$. Уравнение имеет решения, следовательно графики пересекаются. Ответ: да.

1285. Выяснить, является ли четной или нечетной функция:

1)–3) Аналогично 4).

4) $y = \left| \ln \frac{5+x}{5-x} \right|$. Решение: область определения функции $-5 < x < 5$ симмет-

рична. Рассмотрим $y(-x) = \left| \ln \frac{5-x}{5+x} \right| = \left| \ln \left(\frac{5+x}{5-x} \right)^{-1} \right| = \left| -\ln \frac{5-x}{5+x} \right| = \left| \ln \frac{5-x}{5+x} \right|$,

т.е. функция четная. Ответ: четная.

1286, 1287. Аналогично задаче 1285.

1288, 1289. Аналогично задачам 705 и 706.

1290. 1) Указание: функция четная.

2) Указание: функция нечетная.

1291. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = ax^2 + bx - 4$,

если $y(1) = 0$ и $y(4) = 0$. Решение: найдем a и b : $\begin{cases} a + b - 4 = 0 \\ 16a + 4b - 4 = 0 \end{cases}$, откуда

$a = -1$, $b = 5$. Т.е. Наибольшее значение равно $y(2,5) = 2,25$. Наименьшего значения не существует.

Ответ: 2,25; наименьшего значения не существует.

1292. 1) Указание: $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)$.

2) Указание: $2 \cos 2x + \sin^2 x = 2 \cos 2x + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2x$.

1293. Указание: точка пересечения с осью OY ($0; y(0)$); решите уравнение $y(x) = 0$, тогда получатся точки пересечения с осью OX .

1294. Указание: найдите a, b, c , см. задачу 1291.

1295. Указание: $y^2 = 25 - x^2$, $y > 0$. Т.е. $x^2 + y^2 = 25$ – это верхняя полуокружность окружности с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 5.

1298. 1) Указание: график $y = 2^{x-1} - 3$ получается из графика $y = 2^x$ сдвигом на 1 единицу вправо и 3 единицы вниз.

2) Указание: график $y = \log_2(x+2) + 3$ получается из графика $y = \log_2 x$ сдвигом на 2 единицы влево и 3 единицы вверх.

1299. 1) Указание: $6 - 3x > 0$.

2) Указание: $2x + 4 > 0$.

3) Указание: $\cos 2x \neq 0$.

4) Указание: $\frac{x}{4} \neq \pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

1300. 1) $y = \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}$. Решение: необходимо $\sqrt{\frac{x-3}{x+3}} \geq 0$, т.е. $x < -3, x \geq 3$.

Ответ: $x < -3, x \geq 3$.

2) Указание: решите неравенство $\log_3 \frac{2x+1}{x-6} \geq 0$.

1301. 1) Указание: решите неравенство $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11} \geq 0$ методом интервалов.

2) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-3) - 1}$. Решение: необходимо $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq 0$. Кроме того,

$x > 3$ из области определения логарифма. Т.е. $\begin{cases} x > 3 \\ x - 3 \leq 0,5 \end{cases}, 3 < x \leq 3,5$.

Ответ: $3 < x \leq 3,5$.

1302. Аналогично задаче 1301.

1303. 1), 2) Указание: найдите вершину параболы и значение в ней.

3) $y = e^x + 1$. Решение: e^x пробегает весь луч $(0; +\infty)$ при $x \in \mathbf{R}$, тогда $e^x + 1$ пробегает весь луч $(1; +\infty)$. Ответ: $(1; +\infty)$.

4) Аналогично 3).

1304. 1) Аналогично 2).

2) $y = 0,5 \cos x + \sin x$. Решение:

$$0,5 \cos x + \sin x = \sqrt{1 + 0,25} \left(\frac{0,5}{0,5\sqrt{5}} \cos x + \frac{1}{0,5\sqrt{5}} \sin x \right) = \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(x - \varphi), \text{ где}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}. \text{ Т.к. } -1 \leq \cos(x - \varphi) \leq 1, \text{ то } -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

1305. Указание: угловой коэффициент $k = f'(x_0)$.

1306. Указание: угол равен $\operatorname{arctg} k = \operatorname{arctg} f'(x_0)$.

1307. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 .

1) $f(x) = \frac{3}{4x\sqrt{x}}$, $x_0 = \frac{1}{4}$. Решение: $\left(\frac{3}{4x\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{3}{4}x^{-3/2}\right)' = -\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$.

Тогда уравнение касательной $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, т.е.

$$y = -\frac{9}{8} \cdot 32 \left(x - \frac{1}{4}\right) + 6, y = -36x + 15. \text{ Ответ: } y = -36x + 15.$$

2) Аналогично 1).

1308. Указание: аналогично задаче 1307, точка пересечения с осью OY соответствует $x_0 = 0$.

1309. Указание: $3x^2 - 1 = 2$, откуда $x_0 = \pm 1$. См. задачу 1305.

1310. Прямая $y = 4x - 3$ является касательной к параболе $y = 6 - 2x + x^2$. Найти координаты точки касания. Решение: найдем точку, такую что $f'(x) = 4$, $f'(x) = -2 + 2x$, $-2 + 2x = 4$, откуда $x = 3$. Тогда $y = f(x) = 9$.
 Ответ: (3; 9).

1312. Указание: аналогично задаче 1311; угловой коэффициент равен

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \text{ т.е. } f'(x_0) = 1.$$

1313. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 .

1) $f(x) = x \ln 2x$, $x_0 = 0,5$. Решение: $f'(x) = \ln 2x + 2$,

$$y = f'(0,5)(x - 0,5) + f(0,5), y = 2(x - 0,5) + 0, y = 2x - 1. \text{ Ответ: } y = 2x - 1.$$

1314. Указание: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 7$; угол равен $\operatorname{arctg} y'(2)$.

1315. Найти тангенс угла, который касательная к графику функции $y = x^2 e^{-x}$ в точке с абсциссой $x = 1$ образует с осью OX . Решение: тангенс угла равен угловому коэффициенту касательной в точке $x_0 = 1$.

$$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}, y'(1) = \frac{2}{e} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}. \text{ Ответ: } \frac{1}{e}.$$

1316. Аналогично задаче 1315.

1317. Указание: найдем точки пересечения: $\frac{x^3+1}{3} = 0$, откуда $x_0 = -1$. Аналогично задаче 1313.

1318. Указание: аналогично 1313; $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

1319. Найти промежутки монотонности функции:

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}. \text{ Решение: } y' = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}. \text{ Т.е. } y' > 0 \text{ при}$$

$x < 0$ (т.е. функция возрастает) и $y' < 0$ при $x > 0$ (т.е. функция убывает).
 Ответ: функция возрастает при $x < 0$; функция убывает при $x > 0$.

1320. 1) $y = (x-1)^2(x-2)^2$. Решение: $y' = 3(x-1)^2(x-2)^2 + 2(x-2)(x-1)^2 =$
 $= (x-2)(x-1)^2(3x-6+2x-2) = (x-2)(x-1)^2(5x-8)$. Т.е. точки экстремума 2 и 1,6 (т.к. в них меняет знак). Ответ: $x_0 = 2$ и $x_0 = 1,6$.

2) Аналогично 1).

1321. Аналогично задаче 1320.

1322. 1) $y = 2\sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$. Решение: найдем точки экстремума:

$$y' = 2\cos x + 2\cos 2x = 2(\cos x + 2\cos^2 x - 1) =$$

$$= 2(\cos x + 1)(2\cos x - 1). \text{ Точки экстремума: } \cos x = \frac{1}{2} \text{ т.е. } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k,$$

$k \in \mathbb{Z}$. Из них в промежутке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ попадает только $\frac{\pi}{3}$. $y(0) = 0$;

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2. \text{ Ответ: } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } -2.$$

1323, 1324. Аналогично задаче 1322.

1325. См. задачу 978.

1326–1328. Аналогично задачам 963–965; 973–975.

1329. Указание: $F(x) = -\frac{1}{x} + \sin x + C$.

1330. Аналогично задаче 1322.

1331. Указание: аналогично задаче 1322. $y' = \frac{6\ln^2 x}{x} - \frac{18\ln x}{x} + \frac{12}{x}$.

1332. Аналогично задаче 951.

1333, 1334. Аналогично задаче 950.

1335. Указание: необходимо $x_0 = -\frac{p}{2} = 5$ и $y(x_0) = 1$.

1336. Указание: если h – высота конуса, то $V(h) = \frac{\pi h(20^2 - h^2)}{3}$, $0 \leq h \leq 20$.

1337. Аналогично задаче 1336.

1338–1343. Аналогично задаче 1344.

1344. Консервная жестяная банка заданного объема должна иметь форму цилиндра. При каком соотношении между диаметром основания и высотой расход жести будет наименьшим? Решение: пусть V – объем, r – радиус

основания. Тогда $V = \pi r^2 h$, откуда $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Площадь боковой поверхности

$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$, $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$. $S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$,

т.е. $r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Ответ: $r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

1345–1346. Аналогично задаче 1344.

1347. Найти экстремумы функции.

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$. Решение: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$.

Т.е. $x_0 = -3$ – точка максимума, $x_0 = 1$ – точка минимума.

Ответ: $x_0 = -3$, $x_0 = 1$.

2) Аналогично 1).

1348. Указание: $y' = 3x^2 - 3$, т.е. $x_0 = -1$ – точка максимума, $x_0 = 1$ – точка минимума. См. рис. 203.

1349. Указание: $y' = 3x^2 - 10x - 1$. Уравнение касательной:

$y = y'(4)(x-4) + y(4)$, $y = 7(x-4) - 15$, $y = 7x - 43$.

1350. Аналогично 1351.

1351. 1) $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$. Решение: функция $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$ имеет корни $x = 0$ и

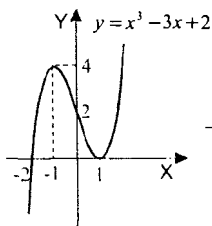


Рис. 203

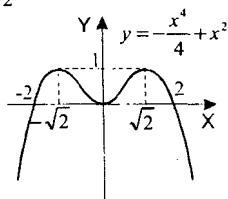


Рис. 204

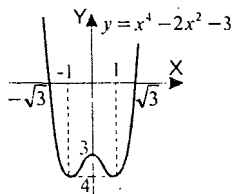


Рис. 205

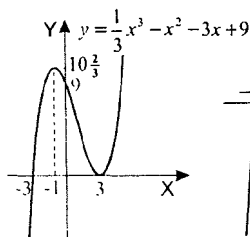


Рис. 206

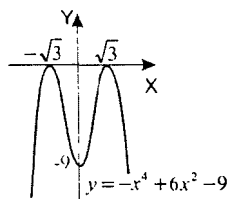


Рис. 207

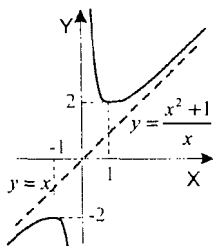


Рис. 208

$x = \pm 2$. Исследуем функцию на экстремумы: $y' = -x^3 + 2x = -x(x^2 - 2)$.

Т.е. $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$ – точки максимума, $x = 0$ – точка минимума. Эскиз графика см. на рис. 204.

2) Аналогично 1), см. рис. 205.

1352. 1) Аналогично задаче 1350. См. рис. 206.

2) Указание: $y = -(x^2 - 3)^2$. Аналогично задаче 1350. См. рис. 207.

3) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. Решение: область определения функции $x \neq 0$. Функция не

имеет нулей. Исследуем поведение функции при $x \rightarrow \infty$: $y = x + \frac{1}{x}$, т.е.

при $x \rightarrow \infty$ $y(x) \rightarrow x$. Исследуем функцию на экстремум:

$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, т.е. $x_0 = -1$ – точка максимума, $x_0 = 1$ – точка минимума. См. рис. 208.

4) Аналогично 3). См. рис. 209.

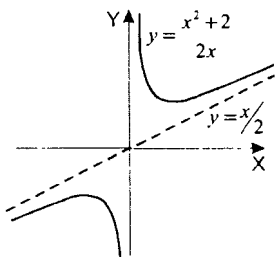


Рис. 209

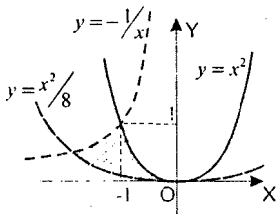


Рис. 210

1353. 1) $y = \sqrt{x-1}$, $y = 3-x$, $y = 0$. Решение: найдем координаты точек пересечения графиков: $\sqrt{x-1} = 3-x$, при $x \leq 3$ $x-1 = x^2 - 6x + 9$, $x^2 - 7x + 10 = 0$,

откуда $x = 5$ (не удовлетворяет условию $x \leq 3$) и $x = 2$. Тогда

$$S = \int_1^2 \sqrt{x-1} dx + \int_2^3 (3-x) dx = \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} \Big|_1^2 + \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^3 = \frac{2}{3} + 9 - 4,5 - 6 + 2 = 1 \frac{1}{6}.$$

Ответ: $S = 1 \frac{1}{6}$.

2) $y = -1/x$, $y = x^2$, $y = x^2/8$. Решение: найдем координаты точек пересечения $-1/x = x^2$, откуда $x = -1$ и $-1/x = x^2/8$, откуда $x = -2$. Тогда

сечения $-1/x = x^2$, откуда $x = -1$ и $-1/x = x^2/8$, откуда $x = -2$. Тогда

$$S = \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{x} \right) dx + \int_{-1}^0 x^2 dx - \int_{-2}^0 \frac{x^2}{8} dx = -\ln|x|_{-2}^{-1} + \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^0 - \frac{x^3}{24} \Big|_{-2}^0 = -\ln(-1) + \ln(-2) + \frac{1}{3} - \frac{8}{24} = \ln 2.$$

См. рис. 210. Ответ: $S = \ln 2$.

1354. Аналогично задаче 1353.

1355. 1) Указание: $S = \int_2^9 \sqrt{x} dx$.

2) Указание: $S = \int_{-1}^2 (x+5) dx - \int_{-1}^2 (3+x^2) dx$.

1356. 1) Указание: см. рис. 211, $S = \int_{-1}^2 (9-x)^2 dx - \int_{-1}^2 ((x-1)^2 - 4) dx$.

2) Указание: $S = \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx - \int_0^1 x^2 dx$.

1357. 1) Указание: $S = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos x dx$.

2) Указание: $S = \int_{-1}^1 3^x dx = \int_{-1}^1 e^{x \ln 3} dx = \frac{1}{\ln 3} e^{x \ln 3} \Big|_{-1}^1 = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_{-1}^1$.

7. Производная и интеграл

1358. Указание: 1) $f'(x) = 3x^2 - x + 1$; 2) $f'(x) = \frac{1/x \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$;

3) $f'(x) = -3x^{-4} + 4x^{-3} + 3$; 4) $f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$.

1359. Найти значения x , при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0.

1) $f(x) = \sin 2x - x$. Решение: $f'(x) = 2 \cos 2x - 1 = 0$. Т.е. $\cos 2x = \frac{1}{2}$, от-

куда $2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) Аналогично 1).

3) $f(x) = (2x - 1)^3$. Решение: $f'(x) = 3 \cdot 2(2x - 1)^2$, т.е. $f'(x) = 0$ при $x = \frac{1}{2}$. Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

4) Аналогично 3).

1360. Указание: $f'(x) = 2(3x^2 + 1) + 6x(2x - 3)$.

1361. Указание: решите неравенство $3x^2 - 3x - 18 < 0$.

1362. Указание: скорость $v(t) = h'(t) = v_0 - 9,8t$. Пуля поднимается вверх до тех пор, пока ее скорость больше нуля, т.е. в момент остановки $v(t) = 0$.

1363. Указание: пусть $\alpha(t)$ – угол поворота. Тогда $\alpha(t) = Ct^3$ и $\alpha(2) = 2\pi$,

откуда $C = \frac{\pi}{4}$. Т.е. $\alpha(t) = \frac{\pi}{4}t^3$. Угловая скорость $\omega(t) = \alpha'(t)$.

1364. 1) $y = \frac{x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^3}$. Решение: $y = x^2 - 3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}$, тогда

$y' = 2x - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{9}{x^4}$. Ответ: $y' = 2x - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{9}{x^4}$.

2) Указание: аналогично 1), $y = 6x^{\frac{5}{6}}$.

$$1365. 1) \left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{x+1} \right)' = \frac{(6x-2)(x+1) - 1 \cdot (3x^2 - 2x + 1)}{(x+1)^2} = \\ = \frac{6x^2 + 4x - 2 - 3x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = \frac{3x^2 + 6x - 3}{(x+1)^2}.$$

2) Аналогично 1).

$$1366. 1) y' = 2 \cdot 2(2x+1)\sqrt{x-1} + \frac{(2x+1)^2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{8(2x+1)(x-1) + (2x+1)^2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{(2x+1)(10x-7)}{2\sqrt{x-1}}$$

$$2) y' = 2x^3\sqrt{(x+1)^2} + x^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{4x(x+1) + 2x^2}{3\sqrt{x+1}} = \frac{6x^2 + 4x}{3\sqrt{x+1}}.$$

$$1367. \text{ Указание: } f'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2) = 3x^2 - 12x + 11.$$

$$1368. 1) \text{ Указание: } f'(x) = 2xe^{3-2x} - 2e^{3-2x} \cdot x^2 = 2xe^{3-2x}(1-x).$$

$$2) \text{ Указание: } f'(x) = \frac{2xe^{1-x} + x^2e^{1-x}}{e^{2(1-x)}} = \frac{x^2 + 2x}{e^{1-x}}.$$

$$1369. \text{ Указание: } f'(x) = \frac{2 \cos 2x(1 - \sin 2x) + 2 \cos 2x(1 + \sin 2x)}{(1 - \sin 2x)^2} = \frac{4 \cos 2x}{(1 - \sin 2x)^2}.$$

$$1370. \text{ Указание: решите неравенство } 3x^2 + 2x + \sqrt{3} \leq \sqrt{3}.$$

1371. Аналогично задаче 992.

1372. 1) Указание: по таблице находим первообразную:

$$F(x) = \ln|x+1| - \ln|x-1| + C.$$

$$2) \text{ Указание: по таблице находим первообразную: } F(x) = \frac{3}{4} \ln|4x-1| + C.$$

$$1373. 1) \int_2^9 \sqrt{x-1} dx = \int_2^9 (x-1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{3}{4} (x-1)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^9 = \frac{3}{4} \cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4} \cdot 1 = 11,25.$$

Ответ: 11,25.

$$2) \text{ Указание: } \int_2^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos^2 x - 1) dx = \int_2^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx.$$

$$3) \text{ Указание: } \int_3^4 \frac{x^2 + 3}{x-2} dx = \int_3^4 \left(x + 2 + \frac{7}{x-2} \right) dx.$$

1374. 1)–5) Аналогично задаче 1373 п.1).

$$6) \int_{-1}^1 \frac{2}{5-4x} dx = -\frac{2}{4} \ln|5-4x| \Big|_{-1}^1 = -\frac{2}{4} \ln 1 + \frac{2}{4} \ln 9 = \ln 3. \text{ Ответ: } \ln 3.$$

8. Задания, предлагавшиеся на выпускных экзаменах

Гуманитарные классы

1375. 1) Решить уравнение $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ и указать любой его положи-

тельный корень. Решение: $3x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, откуда $3x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$,

$k \in \mathbf{Z}$, т.е. $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Положительный корень, например

$$x = \frac{7\pi}{36}. \text{ Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbf{Z}; x = \frac{7\pi}{36}.$$

2) Решить неравенство $\log_2(3-2x) < -1$. Решение: область определения неравенства $3-2x > 0$, т.е. $x < 1,5$. По свойству логарифмической функции $3-2x < \frac{1}{2}$, т.е. $x > \frac{5}{4}$. С учетом области определения $1,25 < x < 1,5$.

Ответ: $1,25 < x < 1,5$.

3) Указание: преобразуйте выражение $2^{3a+2} = 2^{\cdot a^2}$.

4) Указание: $S = \int_0^4 x(4-x) dx = \int_0^4 (4x - x^2) dx$.

5) Найти область определения функции: $y = \sqrt{4 - \frac{9}{x+1} + \frac{1}{x-3}}$. Решение:

т.к. квадратный корень определен только для неотрицательных чисел, то

$$4 - \frac{9}{x+1} + \frac{1}{x-3} \geq 0, \quad \frac{4(x+1)(x-3) - 9(x-3) + (x+1)}{(x+1)(x-3)} \geq 0, \quad \frac{4x^2 - 16x + 16}{(x+1)(x-3)} \geq 0,$$

$$\frac{4(x-2)^2}{(x+1)(x-3)} \geq 0. \text{ Решая методом интервалов, находим } x > 3, x < -1 \text{ и}$$

$x = 2$. Ответ: $x > 3, x < -1, x = 2$.

6) При каком значении a наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + a$ на отрезке $[-2; 0]$ равно 5? Решение: Найдем наибольшее значение функции на промежутке $[-2; 0]$. $y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$. Т.е. экстремальные точки $x_0 = -1$ и $x_0 = 1$ (не попадает в заданный промежуток). Сравним $f(-2)$, $f(-1)$ и $f(0)$. $f(-2) = a - 2$, $f(-1) = a + 2$ и $f(0) = a$. Т.к. $a - 2 < a < a + 2$ при всех значениях a , то необходимо $a + 2 = 5$, откуда $a = 3$. Ответ: $a = 3$.

1376. 1) Указание: $\sin x = -1$ и $\sin x = 5$ (постороннее решение).

2) Указание: $f'(x) = 6x(1-x) - 3x^2 = 6x - 9x^2 = 3x(2-3x)$. Сравните значения $f(0)$, $f(1)$ и $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

3) Решить уравнение: $\lg x = \lg 3 - \lg(3x-8)$. Решение: область определения уравнения $\begin{cases} x > 0 \\ 3x-8 > 0 \end{cases}$, т.е. $x > \frac{8}{3}$. Преобразуем уравнение: $\lg x + \lg(3x-8) = \lg 3$, $\lg x(3x-8) = \lg 3$, откуда $x(3x-8) = 3$, $3x^2 - 8x - 3 = 0$, т.е. $x = 3$ и $x = -\frac{1}{3}$ (не удовлетворяет области определения).

Ответ: $x = 3$.

4) Указание: $S = 6 \cdot 9 - \int_0^6 (x-3)^2 dx = 54 - \frac{(x-3)^3}{3} \Big|_0^6$.

5) Решить неравенство: $\frac{(x-5) \left(2^{\frac{1}{x-1}} + 0,2 \right)}{x+2} \leq 0$. Решение: область определения неравенства $x \neq 1$, $x \neq -2$. Т.к. $2^{\frac{1}{x-1}} + 0,2 > 0$ при всех допустимых x , то $\frac{x-5}{x+2} \leq 0$, откуда $-2 < x \leq 5$. С учетом области определения $-2 < x < 1$, $1 < x \leq 5$. Ответ: $-2 < x < 1$, $1 < x \leq 5$.

6) Указание: графики пересекаются, если уравнение $x^2 - 4x + 2 = -2x + a$ имеет решение. Т.е. в уравнении $x^2 - 2x + (2-a) = 0$ $D \geq 0$.

Общеобразовательные классы

1377. 1) Решить неравенство $2^{\log_2(1+2^x)} > 4$. Решение: область определения неравенства $x > -\frac{1}{2}$. По свойству показательной функции $1 + 2x < 0,7^2$, т.е. $x < -0,15$. С учетом области определения $-0,5 < x < -0,15$.

Ответ: $-\frac{1}{2} < x < -\frac{51}{200}$.

2) Указание: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

3) Решить уравнение $\sqrt{x^4 - 3x - 1} = x^2 - 1$. Решение: т.к. левая часть неотрицательна, то правая часть $x^2 - 1 \geq 0$, откуда $x \geq 1$ или $x \leq -1$. Тогда возведем обе части уравнения в квадрат $x^4 - 3x - 1 = x^4 - 2x^2 + 1$, $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Откуда $x = 2$ или $x = -\frac{1}{2}$ (не удовлетворяет условию $x \geq 1$ или $x \leq -1$). Проверка показывает, что $x = 2$ удовлетворяет области определения, т.е. корень. Ответ: $x = 2$.

4) Указание: $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_0^4 \frac{x}{2} dx$.

5) Указание: необходимо, чтобы уравнение $y'(x) = 0$ имело единственное решение, т.е. $D = 0$.

6) Решить уравнение: $\sin \frac{5\pi}{4} x = x^2 - 4x + 5$. Решение: $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geq 1$ при всех $x \in \mathbf{R}$, а $\sin \frac{5\pi}{4} x \leq 1$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Т.е. необ-

ходимо $\begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 1 \\ \sin \frac{5\pi}{4} x = 1 \end{cases}$, откуда $x = 2$. Ответ: $x = 2$.

1378. 1) Указание: $\sqrt[4]{36^{\log_6 5} - 5^{\log_6 9}} = \sqrt[4]{6^{(\log_6 5)^2} - 5^{\log_6 9}} = \sqrt[4]{25 - 9}$.

2) Указание: уравнение касательной $y = \frac{1}{3} e^{\frac{x_0}{3}} (x - x_0) + e^{\frac{x_0}{3}}$. Необходимо $0 = \frac{1}{3} e^{\frac{x_0}{3}} (0 - x_0) + e^{\frac{x_0}{3}}$, откуда получаем уравнение $e^{\frac{x_0}{3}} \left(1 - \frac{x_0}{3}\right) = 0$.

3) Решить систему уравнений: $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - y\right) = 1 \\ x + y = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$. Решение: по

формулам приведения преобразуем первое уравнение:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - y\right) = \cos(-\pi - y) - \cos y = -2 \cos y.$$

Т.е. $-2\cos y = 1$, откуда $\cos y = -\frac{1}{2}$, $y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Тогда

$$x = -\frac{3\pi}{2} \mp \frac{2\pi}{3} - 2\pi k.$$

Ответ: $\left(-\frac{13\pi}{6} - 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{5\pi}{6} - 2\pi k; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) Решить неравенство $(3-x)\log_3(x+5) \leq 0$. Решение: область определе-

ния неравенства $x > -5$. Тогда $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ \log_3(x+5) \leq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3-x \leq 0 \\ \log_3(x+5) \geq 0 \end{cases}$. Из

первой системы $x \leq -4$, а из второй $x \geq 3$. Тогда с учетом области определе-
ния $-5 < x \leq -4$ и $x \geq 3$. Ответ: $-5 < x \leq -4$, $x \geq 3$.

5) Вычислить интеграл: $\int_{-6}^6 \sqrt{36-x^2} dx$. Решение: рассмотрим функцию

$y = \sqrt{36-x^2}$. Т.е. $y^2 + x^2 = 36$. Т.е. данный интеграл – площадь верхнего
полукруга круга $y^2 + x^2 \leq 36$ (см. рис. 211). Тогда:

$$\int_{-6}^6 \sqrt{36-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi \cdot 6^2 = 18\pi. \text{ Ответ: } 18\pi.$$

6) Решить уравнение: $\cos\sqrt{2-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Решение: область определения

уравнения $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Тогда $\sqrt{2-x^2} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Т.к.

$0 \leq \sqrt{2-x^2} \leq 2$, то возможно только $\sqrt{2-x^2} = \frac{\pi}{6}$, откуда $2-x^2 = \frac{\pi^2}{36}$,

$$x^2 = 2 - \frac{\pi^2}{36}. \text{ Ответ: } x = \pm\sqrt{2 - \frac{\pi^2}{36}}.$$

Профильные классы

1379. 1) Указание: $\cos x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x)$.

Сделайте замену $u = \cos 2x$.

2) Указание: область определения неравенства $x < 0$. Тогда

$\log_4 x^2 + \log_2^2(-x) = \log_2(-x) + \log_2^2(-x)$. Сделайте замену $u = \log_2(-x)$.

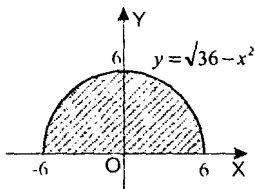


Рис. 211

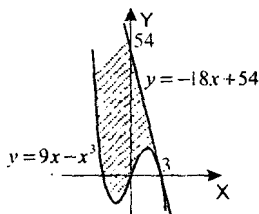


Рис. 212

3) Указание: из первого уравнения $2x + y = 2$, тогда $\sqrt{2-2x} - \sqrt{x} = 1$.

4) Указание: см. рис. 212. Уравнение касательной $y = -18x + 54$; $-18x + 54 = 9x - x^3$ при $x = 3$ и $x = -6$. Тогда:

$$S \approx \int_{-6}^3 (-18x + 54) dx - \int_{-6}^3 (9x - x^3) dx.$$

5) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 2 - 3\sin x + 4\cos x \text{ на отрезке } \left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right].$$

Решение: $y' = -3\cos x - 4\sin x = -5\cos(x - \varphi)$, где $\cos \varphi = \frac{3}{5}$, $\sin \varphi = \frac{4}{5}$.

Тогда необходимо сравнить $y\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$, $y\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $y\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$, $y\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$,

т.к. $\varphi < \frac{\pi}{3}$ (т.к. $\cos \varphi > \cos \frac{\pi}{3}$). $y\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 2 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - 2\sqrt{3}$;

$$y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - 2\sqrt{3};$$

$$y\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 2 - 3\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 2 + 3\cos \varphi + 4\sin \varphi = 7;$$

$$y\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 2 - 3\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 2 - 3\cos \varphi - 4\sin \varphi = -3. \text{ Тогда}$$

максимальное значение равно 7, а минимальное равно -3. Ответ: 7 и -3.

1380. 1) Указание: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, а $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$. Сделайте замену $u = \cos 2x$.

2) Найти производную функции $y = \log_{3x+4}(7x-4)$ в точке $x = 2$. Решение: по формуле замены основания $y = \frac{\ln(7x-4)}{\ln(3x+4)}$, тогда:

$$y' = \frac{\frac{7}{7x-4} \cdot \ln(3x+4) - \frac{3}{3x+4} \cdot \ln(7x-4)}{\ln^2(3x+4)}. \quad y'(2) = \frac{\frac{7}{10} \cdot \ln 10 - \frac{3}{10} \cdot \ln 10}{\ln^2 10} = \frac{0,4}{\ln 10}.$$

Ответ: $y'(2) = \frac{0,4}{\ln 10}$.

3) Указание: $S = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2 \cos 3x - 5 \sin 2x + 10) dx$.

4) Найти множество значений функции $y = \sqrt{6x-7} - 2x$. Решение: область определения функции $x \geq 7/6$. $y' = \frac{3}{\sqrt{6x-7}} - 2$, т.е. $y' = 0$ если

$$2\sqrt{6x-7} = 3, \quad 4(6x-7) = 9, \quad 24x = 37, \quad \text{откуда } x = \frac{37}{24}, \quad y\left(\frac{37}{24}\right) = -\frac{19}{12}. \quad \text{При}$$

$x \rightarrow +\infty$ $y(x)$ неограниченно убывает. $y\left(\frac{7}{6}\right) = -\frac{7}{3}$, т.е. множество значений

$$\left(-\infty; -\frac{19}{12}\right]. \quad \text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{19}{12}\right].$$

5) Указание: рассмотрите два случая: $x \geq 0$ и $x < 0$.

6) На прямой $y = 6x - 9$ найти все такие точки, что через каждую из них проходят ровно две касательные к графику функции $y = x^2$ и угол между этими касательными равен $\frac{\pi}{4}$.

Решение: общий вид уравнения касательной к $y = x^2$ такой: $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$, $y = 2x_0x - x_0^2$, тогда $6x - 9 = 2x_0x - x_0^2$, откуда $x_0 = 3$. Т.е. прямая $y = 6x - 9$ касается графика функции $y = x^2$ в точке (3; 9), см. рис. 213. Рассмотрим другую касательную к графику $y = x^2$.

Пусть x_0 – точка касания, тогда $y = 2x_0x - x_0^2$. Тогда если φ_1 – угол наклона прямой $y = 6x - 9$, а φ_2 – угол наклона прямой $y = 2x_0x - x_0^2$, то $\frac{\pi}{4} = \varphi_2 - \varphi_1$.

Тогда $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1}$. Т.е.

$$1 = \frac{2x_0 - 6}{1 + 2x_0 \cdot 6}, \quad \text{откуда} \quad 1 + 12x_0 = 2x_0 - 6,$$

$10x_0 = -7$, $x_0 = -0,7$. Т.е. уравнение второй

касательной $y = -1,4x - 0,49$. Найдем координаты точки пересечения прямых: $-1,4x - 0,49 = 6x - 9$, $7,4x = 8,51$, $x = 1,15$, тогда $y = -2,1$.

Ответ: $(1,15; -2,1)$.

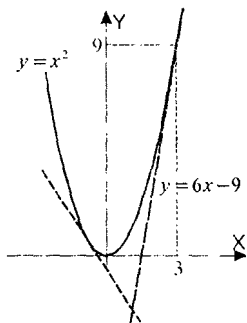


Рис. 213

Задачи для внеклассной работы

1. Разные задачи

1381. 1) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{25 + 10x + x^2} = 8$. Решение: преобразуем уравнение

$$\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x+5)^2} = 8, |x-3| + |x+5| = 8. \text{ Рассмотрим три случая:}$$

Если $x < -5$, то $3 - x - x - 5 = 8$, $2x = -10$, откуда $x = -5$ (не удовлетворяет условию $x < -5$).

Если $-5 \leq x < 3$, то $3 - x + x + 5 = 8$ – истинное равенство.

Если $x \geq 3$, то $x - 3 + x + 5 = 8$, откуда $x = 3$.

Ответ: $-5 \leq x \leq 3$.

2) Аналогично 1).

3) Указание: домножьте обе части уравнения на $\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{27+x}$ и воспользуйтесь формулой суммы кубов.

4) $\sqrt[4]{8-x} + \sqrt[4]{89+x} = 5$. Решение: О.О.У. $-89 \leq x \leq 8$. Обозначим

$$u = \sqrt[4]{8-x}, v = \sqrt[4]{89+x}. \text{ Тогда уравнение равносильно: } \begin{cases} u+v=5 \\ u^4+v^4=98 \end{cases}, \text{ т.е.}$$

$$u^4+v^4 = (u+v)^4 - 4uv(u+v) - 6(uv)^2, \text{ откуда } 625 - 20uv - 6(uv)^2 = 98;$$

$$6(uv)^2 + 20uv - 527 = 0. \text{ Т.е. } uv = 6 \text{ или } uv = -\frac{527}{36} \text{ -- посторонний корень,}$$

т.к. $u \geq 0, v \geq 0$. Тогда $\begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \end{cases}$, т.е. $u=2, v=3$ или $u=3, v=2$. Откуда

$x = -8$ или $x = -73$. Ответ: $x = -8, x = -73$.

1382. 2) Указание: $\sqrt{3-\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}$. Введите новую неизвестную

$$u = \left(\sqrt{3+\sqrt{8}} \right)^x.$$

1383. 1) Указание: $x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x^2 + 1)(x - 3)$.

2) Указание: $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x^2 - 4)(x - 3)$.

3) Указание: $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3 = (x + 1)(x^4 - 6x^2 - 8x - 3) =$
 $= (x + 1)(x + 1)(x^3 - x^2 - 5x - 3) = (x + 1)^2(x^2 - 2x - 1)$.

4) Указание: $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = (x + 1)(x^3 - 4x^2 + 2x - 8) =$
 $= (x + 1)(x - 4)(x^2 + 2)$.

1384. 1) Указание: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$. Тогда $\frac{2}{\sin 2x} = \frac{2(2\cos^2 2x - 1)}{2\sin 2x \cos 2x}$.

Т.к. $\sin 2x \neq 0$, то $2 = \frac{2\cos^2 2x - 1}{\cos 2x}$.

2) $\frac{\sin 4x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$. Решение: О.О.У. $x - \frac{\pi}{4} \neq \pi n$, т.е. $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n$,

$n \in \mathbf{Z}$. Преобразуем уравнение: $\frac{2\sin 2x \cos 2x}{\sqrt{2}(\sin x - \cos x)} = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$,

$2\sin 2x \cos 2x = 2(\sin^2 x - \cos^2 x)$, $\sin 2x \cos 2x = -\cos 2x$.

Если $\cos 2x = 0$, то это решение, т.е. $2x = \pi k + \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$. Из них области определения удовлетворяют только те, где k нечетное.

Если $\cos 2x \neq 0$, то $\sin 2x = -1$, откуда $2x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$; $x = \pi k - \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $x = \pi k - \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

1385. 1) Указание: $\frac{\sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\cos 3x}{\sin 2x} = \frac{\cos(3x - 2x)}{\cos 2x \sin 2x} = \frac{\cos x}{\cos 2x \sin 2x} = \frac{1}{2\cos 2x \sin x}$.

2) Указание: $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin 2x \sin x + \cos x \cos 2x}{\cos 2x \sin x} = \frac{\cos x}{\cos 2x \sin x}$.

1386. $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin 3x} = 2\cos 2x$. Решение: О.О.У. $\sin x \neq 0$ и $\sin 3x \neq 0$, т.е.

$x \neq \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. Преобразуем левую часть уравнения: $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin 3x} =$

$$= \frac{(\sin 3x - \sin x)(\sin 3x + \sin x)}{\sin x \sin 3x} = \frac{2 \sin x \cos 2x \cdot 2 \sin 2x \cos x}{\sin x \sin 3x} = \frac{4 \cos x \cos 2x \sin 2x}{\sin 3x}.$$

Т.е. $\frac{2 \cos x \cos 2x \sin 2x}{\sin 3x} = \cos 2x$; $2 \cos x \cos 2x \sin 2x = \cos 2x \sin 3x$.

Если $\cos 2x = 0$, то $x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}$ – решение.

Иначе: $2 \cos x \sin 2x = \sin 3x$; $2 \cos x \sin 2x = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x$;
 $\sin x \cos 2x - \cos x \sin 2x = 0$; $\sin(-x) = 0$, т.е. $\sin x = 0$ (не удовлетворяет ОО).

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1387. $\log_2(4 \cos x + 3) \log_6(4 \cos x + 3) = \log_2(4 \cos x + 3) + \log_6(4 \cos x + 3)$. Ре-

шение: обозначим $u = 4 \cos x + 3$, тогда $\log_2 u \log_6 u = \log_2 u + \log_6 u$ и

О.О.У. $u > 0$. $\frac{\ln u}{\ln 2} \cdot \frac{\ln u}{\ln 6} = \frac{\ln u}{\ln 2} + \frac{\ln u}{\ln 6}$; $\ln^2 u = \ln u (\ln 6 + \ln 2)$. Тогда $\ln u = 0$

или $\ln u = \ln 6 + \ln 2 = \ln 12$. Тогда $u = 1$ или $u = 12$. Т.е. $4 \cos x + 3 = 1$ или

$4 \cos x + 3 = 12$ (не имеет решений). Из первого уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$;

$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ответ: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

1388. Указание: если x_0 – целый корень уравнения $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, то -6 кратно x_0 .

1389. Указание: подставьте x_1 и x_2 в уравнение. Из полученной системы найдите m и n .

1390. 1)
$$\begin{cases} \log_x x + \log_x y = \frac{5}{2} \\ x + y = a + a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\log_x y} + \log_x y = \frac{5}{2} \\ x + y = a + a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x y = 2 \text{ или } \log_x y = \frac{1}{2} \\ x + y = a + a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \text{ или } y = \sqrt{x} \\ x + x^2 = a + a^2 \text{ или } x + \sqrt{x} = a + a^2 \end{cases}$$

Решение: О.О.С. $x, y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$. Тогда из уравнения

$x + x^2 = a + a^2$ получаем корни $x = a$ и $x = -a - 1$, а из уравнения

$x + \sqrt{x} = a + a^2$ получаем $\sqrt{x} = a$ и $\sqrt{x} = -a - 1$.

Если $a < -1$, то $-a - 1 > 0$, следовательно корни $x = -a - 1$ и $x = (-a - 1)^2$.

Если $a > -1$, то $-a-1 < 0$, следовательно необходимо $a > 0$ и $a \neq 1$. Тогда корни $x = a$ и $x = a^2$.

Ответ: $x = -a-1$, $x = (a+1)^2$ при $a < -1$; $x = a$, $x = a^2$ при $a > 0$, $a \neq 1$.

2) Указание: аналогично 1). Из второго уравнения $\log_b xy = 2$, т.е. $xy = b^2$.

1391. Указание: $x^2 + y^2 - 2y - \cos(xy) + 11 - 6a + a^2 =$

$= x^2 + (y-1)^2 + (a-3)^2 + (1 - \cos(xy)) = 0$, т.к. $x^2 \geq 0$, $(y-1)^2 \geq 0$, $(a-3)^2 \geq 0$ и $1 - \cos(xy) \geq 0$, то равенство возможно только если $x = 0$, $y = 1$, $a = 3$.

1392. 1) Указание: Из первого уравнения $y \ln x = x \ln y$. Т.к. $y > 0$, то

$$\sqrt{x^3} \ln x = x \ln \sqrt{x^3}; \quad x\sqrt{x} \ln x = \frac{3}{2} x \ln x. \text{ Аналогично 2).}$$

$$2) \begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ y^{\sqrt{x}} = x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} \ln x = \ln y \\ \sqrt{x} \ln y = 4 \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ \sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Решение: О.О.С. $x, y > 0$. Возьмем логарифм от обеих частей уравнения. Т.к. $x > 0$, то $x = 2$. Ответ: (2; 4).

3) Указание: сложите уравнения, тогда $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right)$.

4) Указание: подставьте $x = y - \frac{1}{3}$ во второе уравнение.

5) Указание: преобразуйте второе уравнение: $\sin 2x + \sin 2y =$

$$= 2 \sin(x+y) \cos(x-y) = 0, \text{ откуда } x+y = \pi k \text{ или } x-y = \pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

1393.
$$\begin{cases} 6 \sin x \cos y + 2 \cos x \sin y = -3 \\ 5 \sin x \cos y - 3 \cos x \sin y = 1 \end{cases}$$

Решение: сделаем замену $u = \sin x \cos y$, $v = \cos x \sin y$, тогда система

примет вид:
$$\begin{cases} 6u + 2v = -3 \\ 5u - 3v = 1 \end{cases}, \text{ откуда } u = -\frac{1}{4}, v = -\frac{3}{4}. \text{ Т.е. } \sin x \cos y = -\frac{1}{4},$$

$$\cos x \sin y = -\frac{3}{4}. \text{ Тогда } \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y = -1, x+y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$k \in \mathbb{Z}. \text{ Тогда } x = -y - \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ т.е. } \sin\left(-y - \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cos y = -\frac{1}{4};$$

$$-\cos^2 y = -\frac{1}{4}, \text{ откуда } y = \pi n \pm \frac{\pi}{3}, \text{ а } x = \pi m \mp \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{5\pi}{6} + \pi n + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + \pi n \right), \left(-\frac{\pi}{6} + \pi n + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + \pi n \right).$$

1395. 1) Указание: возьмите десятичный логарифм от обеих частей и сделайте замену $u = \lg x$.

$$2) \text{ Указание: } 3^{\lg x^2 + 5} = 3^5 \cdot (3^{\lg x})^2. \text{ Сделайте замену } u = 3^{\lg x}.$$

1396. Указание: О.О.У. $x \neq -1, x \neq -0,5, x \neq -2,5$. Тогда:

$$\log_{|2x+2|} \frac{1-9^x}{(1+3^x)\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right)} < 0. \text{ Если } |2x+2| > 1, \text{ то это неравенство равно-}$$

$$\text{сильно } 0 < \frac{1-9^x}{(1+3^x)\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right)} < 1, \text{ а если } 0 < |2x+2| < 1, \text{ то } \frac{1-9^x}{(1+3^x)\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right)} > 1.$$

$$1397. \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12} > 0. \text{ Решение: } \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12} = \frac{(x^2 - 4)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + 7x + 12)} =$$

$$= \frac{(x + 2)(x - 2)(x + 1)}{(x - 1)(x + 3)(x + 4)} > 0.$$

Решаем методом интервалов.

$$\text{Ответ: } x < -4, -3 < x < -2, -1 < x < 1, x > 2.$$

1398. Указание: возведите неравенство в квадрат (с учетом О.О.Н.).

$$1399. \text{ Указание: } \frac{\sqrt{3x^3 - 22x^2 + 40x}}{x - 4} = \frac{\sqrt{x(x - 4)(3x - 10)}}{x - 4}, \text{ тогда О.О.Н. } x > 4$$

или $0 \leq x \leq \frac{10}{3}$. При $x > 4$ возведите неравенство в квадрат. При

$$0 \leq x \leq \frac{10}{3} \quad \frac{\sqrt{3x^3 - 22x^2 + 40x}}{x - 4} \leq 10 - 3x. \text{ Обе части этого неравенства по-}$$

ложительны, возведите в квадрат.

1400. Указание: неравенство имеет смысл только если $4a - 3 \geq 0$. При таких a возведите неравенство в квадрат.

$$1401. 1) \text{ Указание: } y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

2) Указание: гиперболой с асимптотами $x = 0,5$ и $y = 0$.

3) Указание: $y = 1,5 + \frac{6,5}{2x-3}$ – гипербола с асимптотами $x = 1,5$ и $y = 1,5$.

4) $y = \frac{2x}{2-|x|}$. Решение: при $x \geq 0$ $y = \frac{2x}{2-x} = -2 + \frac{4}{2-x}$. При $x \leq 0$

$$y = \frac{2x}{2+x} = 2 - \frac{4}{2+x}. \text{ См. рис. 214.}$$

1402. 1) См. рис. 215;

2) См. рис. 216;

3) См. рис. 217.

1403. 1) Указание: т.к. $\sin x < 1$, то $\log_2 \sin x \leq 0$, там, где $\sin x > 0$.

2) Указание: О.О.Ф. $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) Указание: О.О.Ф. $x \in \left[\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

4) Указание: $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$.

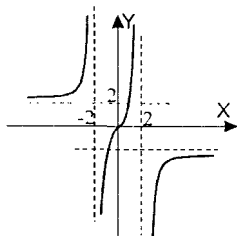


Рис. 214

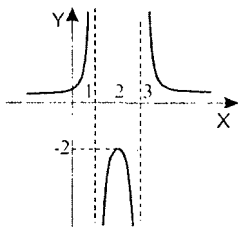


Рис. 215

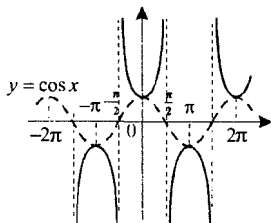


Рис. 216

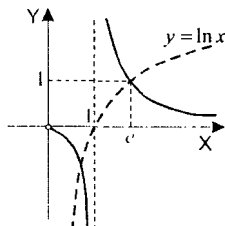


Рис. 217

1404. 1), 2) См. §43.

3) Указание: график $y = \frac{1}{\sin x}$ получается из графика $y = \frac{1}{\cos x}$ сдвигом

на $\frac{\pi}{2}$ влево. См. рис. 216.

4) Аналогично задаче 1402 п.3). См. рис. 217.

1405. $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \frac{\log_d a}{\log_d b} \cdot \frac{\log_d b}{\log_d c} \cdot \log_d c = \log_d a$, ч.т.д.

1406. Аналогично задачам 601, 602.

1407. Указание: $\cos(\arcsin x + \arccos x) = \cos(\arcsin x) \cdot x - x \sin(\arccos x) =$
 $= \sqrt{1-x^2} \cdot x - x \cdot \sqrt{1-x^2} = 0$. См. задачи 580 и 599.

1408. Указание: $f'(x) = 2 \cos 2x + 8(b+2) \cos x - (4b^2 + 16b + 6) =$
 $= 4 \cos^2 x - 2 + 8(b+2) \cos x - (4b^2 + 16b + 6) = 4u^2 + 8(b+2)u - (4b^2 + 16b + 6)$,
 где $u = \cos x$. Необходимо, чтобы $g(u) < 0$ при всех $u \in [-1; 1]$.

1409. Указание: касательные параллельны тогда и только тогда, когда их углы наклона совпадают, т.е. $(3 \cos 5x)' = (5 \cos 3x + 2)'$.

1410. Указание: $R = \frac{BO \cdot OC}{BO + OC}$, т.к. треугольник прямоугольный. Аналогично задаче 1411.

1411. Решение: $y' = \frac{12}{x^2}$, тогда уравнение касательной $y = \frac{12}{x_0^2}(x - x_0) - \frac{12}{x_0}$;

$y = \frac{12}{x_0^2}x - \frac{24}{x_0}$. По условию $-4 = \frac{12}{x_0^2} \cdot 3 - \frac{24}{x_0}$, откуда $x_0 = 3$. Т.е. l задана

уравнением $y = \frac{4}{3}x - 8$ (см. рис. 218). Тогда обозначим $OC = y$, $\triangle EOD \sim \triangle ECB$,

откуда $\frac{CB}{OD} = \frac{EC}{OC}$. $CB = y$, $OD = 6$,

$EC = 8 - y$, $OD = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Тогда

$\frac{7}{6} = \frac{8-y}{10}$; $10y = 48 - 6y$; $y = 3$. Т.е.

$R = 3$. Ответ: $R = 3$.

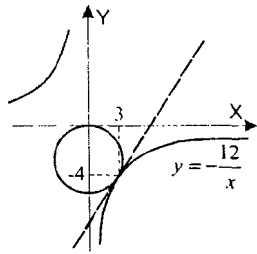


Рис. 218

1412. Указание: $AB = f(t) = \sqrt{(3t)^2 + (5-4t)^2}$. Выясните, принимает ли $f(t)$ значения, меньше 1.

1413. Указание: пусть $A(x_0, y_0)$, тогда $B(4-x_0, y_0)$, т.е. $-x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + c = -(4-x_0)^3 + a(4-x_0)^2 + b(4-x_0) + c$. Кроме того, $y'(x_0) = y'(4-x_0)$. Аналогично задаче 1414.

1414. Решение: из условия симметрии $\frac{x_A + x_B}{2} = -2$, т.е. $x_A + x_B = -4$. Пусть $A(x_0, y_0)$, тогда $B(-4-x_0, y_0)$. По условию $x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + c = (-4-x_0)^3 + a(-4-x_0)^2 + b(-4-x_0) + c$, откуда $b(x_0+2) - a(4x_0+8) + x_0^3 + 6x_0^2 + 24x_0 + 32 = 0$. Т.к. касательные параллельны, то $y'(x_0) = y'(-4-x_0)$. Т.е. $3x_0^2 + 2ax_0 + b = 3(-4-x_0)^2 + 2a(-4-x_0) + b$, откуда $a(x_0+2) - 6x_0 - 12 = 0$, т.е. $(a-6)(x_0+2) = 0$. Т.к. $x_0 \neq 2$ (иначе точки А и В совпадают), то $a = 6$. Тогда первое уравнение имеет вид $b(x_0+2) + x_0^3 + 6x_0^2 - 16 = 0$; $b(x_0+2) + (x_0+2)(x_0^2 + 4x_0 - 8) = 0$, откуда $b = -x_0^2 - 4x_0 + 8$.

Напишем уравнение касательных: $y = y'(x_0)(x-x_0) + y(x_0)$ и $y = y'(-4-x_0)(x+4+x_0) + y(-4-x_0)$, т.е. $y = (2x_0^2 + 8x_0 + 8)x - 2x_0^3 - 6x_0^2 + c$ и $y = (2x_0^2 + 8x_0 + 8)x + 2x_0^3 + 18x_0^2 + 48x_0 + 32 + c$. Подставим координаты

данных точек, получим
$$\begin{cases} 1 = -2x_0^3 - 6x_0^2 + c \\ 5 = 2x_0^3 + 18x_0^2 + 48x_0 + 32 + c \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, находим: $x_0^3 + 6x_0^2 + 12x_0 + 7 = 0$, откуда $(x_0+1)(x_0^2 + 5x_0 + 7) = 0$, т.е. $x_0 = -1$. Значит $b = -1 + 4 + 8 = 11$ и $c = 1 - 2 + 6 = 5$.

Ответ: $a = 6$, $b = 11$, $c = 5$.

1415. Указание: см. рис. 219. Аналогично задаче 1416.

1416. Указание: см. рис. 220. Такое возможно, только если A — точка минимума лежит на оси OX . Тогда $y' = -3x^2 + 2ax + b$, точка минимума

$x_0 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 3b}}{3}$ и $y(x_0) = 0$. Аналогично задаче 1414.

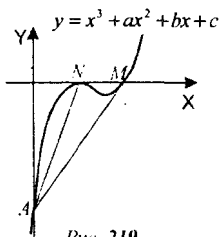


Рис. 219

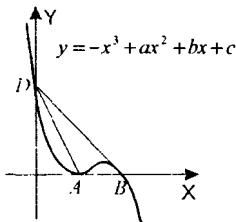


Рис. 220

1417. Решение: точки A и B принадлежат графику $y = 0,5x^2 - 2x + 2$. Тогда уравнение первой касательной $y = -x + 1,5$, а уравнение второй касательной $y = 2x - 6$ (см. рис. 221). Эти прямые пересекаются в точке $x = 2,5$. Поэтому искомая площадь равна:

$$S = \int_1^4 (0,5x^2 - 2x + 2) dx - \int_1^{2,5} (-x + 1,5) dx -$$

$$- \int_{2,5}^4 (2x - 6) dx = \left(\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x \right) \Big|_1^4 - \left(1,5x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^{2,5} - (x^2 - 6x) \Big|_{2,5}^4 = 1,125.$$

Ответ: 1,125.

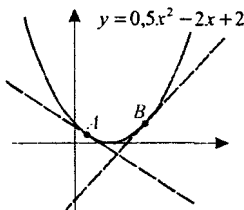


Рис. 221

1418. Указание: уравнение касательной $y = \frac{1}{2\sqrt{a}}x + \frac{\sqrt{a}}{2}$, т.е. эта прямая пересекает ось OX в точке $x = -a$. Тогда площадь треугольника

$$S(a) = \frac{1}{2}(3+a) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot 3 + \frac{\sqrt{a}}{2} \right).$$

Найдите наименьшее значение этой функции на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2 \right]$.

1419. Указание: площадь фигуры равна $\int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$. Если α – угол наклона,

то площадь треугольника равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, отсюда $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{\pi^2}$.

2. Задания, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузы

1420. 1) Указание: обозначьте $u = \sqrt{x+3}$. Тогда $u - \sqrt{2u^2 - 10} = \sqrt{3u^2 - 11}$.

После возведения в квадрат получим $2u\sqrt{2u^2 - 10} = 1$.

2) Указание:
$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{1-(1-x)} = \frac{2}{x}.$$

1421. Указание: рассмотрите четыре варианта раскрытия модулей.

1422. 1) Указание: разделите уравнение на $9^{\frac{1}{x}} \neq 0$ и введите новую неизвест-

тную $u = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2) Указание: на своей ОО данное уравнение равносильно $\frac{2(x^2-3)}{6x-10} = 1$.

3) Указание: сделайте замену $u = \sqrt{\log_2 x}$, О.О.У. $x \geq 1$. Тогда $2u^2 + 2 = 3u$.

4) $\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2$. Решение: О.О.У. $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 4 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Тогда уравне-

ние равносильно уравнению $2x^2 - 3x - 4 = x^2$; $x^2 - 3x - 4 = 0$, откуда $x = -1$ (не удовлетворяет О.О.У.) и $x = 4$. Ответ: $x = 4$.

1423. 1) Аналогично задаче 1422 п.4).

2) $(\log_9(7-x)+1)\log_{3^{-1}} 3 = 1$. Решение: О.О.У. $x < 7$, $x \neq 2$. Тогда

$$\log_9(7-x)+1 = \frac{1}{\log_{3^{-1}} 3}; \quad \frac{1}{2} \log_9(7-x)+1 = \log_3(3-x); \quad \log_9 \frac{3-x}{\sqrt{7-x}} = 1, \text{ т.е.}$$

$$\frac{3-x}{\sqrt{7-x}} = 3, \quad x^2 - 6x + 9 = -9x + 63, \text{ откуда } x = 6 \text{ (не удовлетворяет О.О.У.)}$$

и $x = -9$. Ответ: $x = -9$.

1424. 1) Указание: $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x + \cos 2x = \cos 2x(2 \cos x + 1)$.

2) Указание: $\cos^3 x - 3 \cos^2 x + \cos x + \sin 2x = \cos x(\cos^2 x - 3 \cos x + 1 + 2 \sin x)$,

$$2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 4 \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right) \left(\sin \frac{3x}{2} - \cos \frac{3x}{2}\right) =$$

$$= 4 \left(\left(\cos \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} \right) - \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} \right) \right) =$$

$$= 4(\sin 2x - \cos x) = 4 \cos x (2 \sin x - 1).$$

3) Указание: $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1 + \cos^2 3x - \cos^2 x =$
 $= 1 - 2 \cos 2x \cos x \cdot 2 \sin 2x \sin x = 1 - \sin 4x \sin 2x.$

4) $\operatorname{ctg} x + \sin 2x = \operatorname{ctg} 3x$. Решение: О.О.У. $x \neq \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$. Преобразуем

уравнение: $\frac{\cos x}{\sin x} + \sin 2x - \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\cos x \sin 3x - \sin x \cos 3x}{\sin x \sin 3x} + \sin 2x =$

$$= \sin 2x \left(\frac{1}{\sin x \sin 3x} + 1 \right) = 0. \text{ Тогда } \sin 2x = 0 \text{ или } \sin x \sin 3x = -1. \text{ Из пер-}$$

вого уравнения получаем $x = \frac{\pi k}{2}$. Из этой серии корней О.О. удовлетворя-

ют только $x = \pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. Кроме того, $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = -1$;

$$\cos 2x - \cos 4x = -2, \text{ т.е. } \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}, \text{ откуда } x = \pi k + \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $x = \pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

1425. 1) Указание: $\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}$, возведите уравнение в квадрат.

2) Указание: сделайте замену $u = \sin x - \cos x$. Тогда $\sin 2x = \frac{1 - u^2}{2}$.

1426. $\frac{2 \sin x}{\cos x - \cos 3x} - \frac{1}{3} = 4 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$. Решение: $\cos x - \cos 3x = 2 \sin x \sin 2x$,

откуда О.О.У. $x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}$. Тогда $\frac{2 \sin x}{\cos x - \cos 3x} = \frac{1}{\sin 2x}$, т.е.

$$\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{3} = 2 \left(1 - \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \right) = 2 + 2 \sin 2x; \quad 1 - \frac{1}{3} \sin 2x = 2 \sin 2x + 2 \sin^2 2x;$$

$$2 \sin^2 2x + 2 \frac{1}{3} \sin 2x - 1 = 0. \text{ Откуда } \sin 2x = \frac{3}{2} \text{ (не имеет решений) и}$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{3}, \text{ откуда } x = \frac{1}{2} \cdot (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2} \cdot (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$.

1427. Указание: $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

1428. Указание: $\sin^2 \frac{25\pi}{6} = \frac{1}{4}$, $\sin^4 x - \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 +$
 $+\frac{1}{4}\left(1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 + \frac{1}{4}(1 + \sin 2x)^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\sin 2x - \cos 2x)$.

1429. Указание: $\cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \sin x \cos 2x = -\sin 5x + 2 \sin x \cos 2x =$
 $= \cos 2x(\sin x - \sin 3x) + \sin x(\cos 2x - 2 \sin x \cos 3x) = -2 \cos 2x \sin x \cos 2x +$
 $+ \sin x(\cos 2x - 2 \sin x \cos 3x) = \sin x(\cos 2x - 2 \sin x \cos 3x - 2 \cos^2 2x)$, отку-
 да $\sin x = 0$ или $\cos 2x - 2 \sin x \cos 3x - 2 \cos^2 2x = 0$.

1430. Аналогично задачам 687 и 688.

1431. 1) Указание: из первого уравнения $x = 3y - 5$. Подставьте во второе уравнение.

2) Указание: пусть $\frac{x+y}{x-y} = u$, тогда $u + \frac{1}{u} = \frac{10}{3}$, откуда $u = 3$ или $u = \frac{1}{3}$.

Тогда $\frac{x+y}{x-y} = 3$ или $\frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{3}$.

1432. 1) Указание: из второго уравнения $3^y = \frac{12}{6^x}$, тогда $6^y - \frac{24}{6^x} = 2$;

$(6^x)^y - 2 \cdot 6^x - 24 = 0$, откуда $6^x = 6$ или $6^x = -4$ (не имеет решений).

2) Указание: домножьте первое уравнение на 5, второе на 6 и сложите уравнения.

1433. 1)
$$\begin{cases} 27 \cdot 3^{2x-y} + 3^{y^2} = 4\sqrt{3} \\ \lg(y-4x) = 2\lg(2+2x-y) - \lg y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27 \cdot 3^{2x-y} + 3^{y^2} = 4\sqrt{3} \\ y-4x = \frac{(2+2x-y)^2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27 \cdot 3^{-x^2-1} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3} \\ x^2 + 2x + 1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 \cdot 3^{-x^2} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3} \\ x^2 + 2x + 1 = y \end{cases}$$

Решение: сделаем замену: $u = 3^{x^2}$. Тогда $\frac{9}{u} + u = 4\sqrt{3}$; $u^2 - 4\sqrt{3}u + 9 = 0$,

откуда $u = \sqrt{3}$ и $u = 3\sqrt{3}$. Т.е. $3^{x^2} = 3^{\frac{1}{2}}$ или $3^{x^2} = 3^{\frac{3}{2}}$. Из первого уравне-

ния $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. Из второго уравнения $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$y = \left(1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$ – не удовлетворяет условию $y > 4x$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$.

2) Аналогично 1).

1434. Указание: из первого уравнения $\frac{y-3}{x} = 1$, т.е. $y = 3 + x$. Подставьте во

второе уравнение, необходимо $D \geq 0$ и хотя бы один из корней положительный.

1435. 1) Указание: $\frac{2x-3}{4-x} - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-3x-4+x}{(4-x)x} = \frac{2(x^2-x-2)}{(4-x)x}$, решите мето-

дом интервалов.

2) $\frac{2x-5}{|x+1|} \geq 1$. Решение: О.О.Н. $x \neq -1$. Домножим обе части неравенства на $|x+1|$, тогда $2x+5 \geq |x+1|$. Рассмотрим два случая:

Если $x > -1$, то $2x+5 \geq x+1$, $x \geq -4$. С учетом ограничения $x > -1$.

Если $x < -1$, то $2x+5 \geq -x-1$, $x \geq -2$, т.е. $-2 \leq x < -1$.

Ответ: $-2 \leq x < -1$, $x > -1$.

1436. 1) Указание: $\frac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1} = 2 + \frac{1}{4x^2-2x+1}$. $4x^2-2x+1 \geq \frac{3}{4}$ при всех $x \in \mathbf{R}$.

2) Указание: $\frac{3x^2-4x+8}{9x^2-12x+16} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3(9x^2-12x+16)}$. $9x^2-12x+16 \geq 12$ при всех $x \in \mathbf{R}$.

1437. 1) Указание: неравенство равносильно неравенству $x^2 - 5x + 6 > 0$.

2) Указание: преобразуйте неравенство: $5^{x-2}(25-10) > 3^{x-2}(27-2)$, т.е.

$\left(\frac{5}{3}\right)^{x-2} > \frac{5}{3}$, т.е. $x-2 > 1$.

1438. 1) Указание: неравенство равносильно неравенству $1+x-\sqrt{x^2-4} \geq 1$.

2) Указание: сделайте замену $u = \log_3(3-2x)$, тогда $\frac{1}{u} - \frac{1}{4-u} < 0$.

1439. 1) $\log_{2x+1} x^2 \geq 2$. Решение: О.О.Н. $\begin{cases} x^2 > 0 \\ |2x+1| \neq 1, \text{ т.е.} \\ |2x+1| \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq -0,5 \end{cases}$. Тогда

$$\log_{|2x+1|} |x| \geq 1.$$

Если $|2x+1| < 1$, то необходимо $|x| \leq |2x+1|$, откуда $0 < x < 1$.

Если $|2x+1| \geq 1$, то $|x| \geq |2x+1|$, тогда $-1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$.

Ответ: $-1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$, $0 < x < 1$.

2) Аналогично 1).

1440. $\frac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3} < -1$. Решение: О.О.Н. $x^2+3x-4 \geq 0$, т.с. $x \geq 1$

или $x \leq -4$. Тогда $\frac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}+x-3}{x-3} < 0$; $\frac{4-2x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3} < 0$.

Тогда если $x > 3$, то $4-2x+\sqrt{x^2+3x-4} < 0$; $\sqrt{x^2+3x-4} < 2x-4$.

При $x > 3$ $2x-4 > 0$, возведем обе части неравенства в квадрат. Получим

$$x^2+3x-4 < 4x^2-16x+16; 3x^2-19x+20 > 0, \text{ откуда } x > 5 \text{ или } x < \frac{4}{3} \text{ (не}$$

удовлетворяет условию $x > 3$).

Если $x < 3$, то с учетом О.О. $x \leq -4$. Тогда $\sqrt{x^2+3x-4} > 2(x-2)$. Но в

этом случае $x-2 < 0$, а $\sqrt{x^2+3x-4} \geq 0$. Т.с. $x \leq -4$ – решение.

Ответ: $x \leq -4$, $x > 5$.

1441. Решение: по свойству логарифмической функции $x^2+ax+1 > \frac{1}{2}$, т.е.

$x^2+ax+\frac{1}{2} > 0$ при всех $x < 0$. Это равносильно тому, что квадратное

уравнение $x^2+ax+\frac{1}{2} = 0$ либо не имеет корней, либо оба корня больше

нуля. В первом случае $a^2-2 < 0$, т.е. $|a| < \sqrt{2}$. Во втором случае

$a^2-2 \geq 0$ и $-\frac{a}{2} > 0$ (т.е. вершина параболы правее точки нуля). Откуда

получаем $a \leq -\sqrt{2}$. С учетом первого случая $a < \sqrt{2}$. Ответ: $a < \sqrt{2}$.

1442. Указание: уравнение касательной $y = 2(x_0 - 1)x + x_0^2 + 1$. Тогда

$S = \frac{1}{2}(x_0^2 + 1) \cdot \frac{x_0^2 + 1}{2(1 - x_0)}$. Найдите наименьшее значение этой функции на отрезке $[0, 1]$.

1443. Указание: уравнение касательной $y = (4x_0 - 3)x + (8 - 2x_0^2)$. Тогда $0 = (4x_0 - 3) \cdot 0 + (8 - 2x_0^2)$.

1444. Решение: найдем координаты точек пересечения параболы и прямой:

$x^2 + 2x - 3 = kx + 1$; $x^2 + (2 - k)x - 4 = 0$. $x_{1,2} = \frac{k - 2 \pm \sqrt{k^2 - 4k - 12}}{2}$. Тогда

$$S(k) = \int_{x_1}^{x_2} (kx + 1) dx - \int_{x_1}^{x_2} (x^2 + 2x - 3) dx = \left(\frac{kx^2}{2} + x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} - \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right) \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

После преобразований получаем:

$$S(k) = \frac{1}{6}(5k^2 - 8k - 24)\sqrt{k^2 - 4k - 12}.$$

Найдем наименьшее значение $S(k)$:

$$S'(k) = \frac{1}{6}(10k - 8)\sqrt{k^2 - 4k - 12} +$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot \frac{k(5k^2 - 8k - 24)}{\sqrt{k^2 - 4k - 12}} =$$

$$= \frac{15k^3 - 56k^2 - 112k + 96}{6\sqrt{k^2 - 4k - 12}} = \frac{(k - 2)(15k^2 - 26k + 48)}{6\sqrt{k^2 - 4k - 12}}$$

Откуда $k = 2$ – точка минимума (см. рис. 222).

1445. Аналогично задаче 1444.

1446. Аналогично задаче 1417.

1447. Указание: $y' = -12 \cos x \sin x + 6 \cos x = 6 \cos x(1 - 2 \sin x)$. Корни производной $x = \pi k + \frac{\pi}{2}$ и $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Выберите из них те, в которых производная меняет знак с «плюса» на «минус».

1448. Решение: $y(0) = 2a + 3$, $y(2) = 4a + 15$.

Если вершина параболы не принадлежит отрезку $[0; 2]$, т.е. $a < 0$ или $a > 4$,

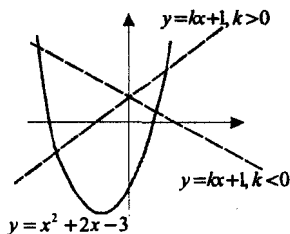


Рис. 222

то необходимо $\min(2a+3; 4a+15) = -4$, откуда $a = -3,5$.

Если вершина параболы попадает в отрезок $[0; 2]$, т.е. $0 \leq a \leq 4$, то необ-

ходимо $\left(\frac{a+4}{2}\right)^2 - \frac{(a+4)(a+4)}{2} + 2a+3 = -4$, откуда находим, что таких a

не существует.

Ответ: $a = -3,5$.

1449. Аналогично задаче 1448.

1450. Указание: необходимо, чтобы значение обеих функций в вершине было либо больше либо меньше нуля.

1451. Указание: сделайте замену $u = \sin^2 x$. Тогда $y = \frac{2u^2 - 3u + 2}{2u^2 - 3u + 1}$.

Оглавление

Глава I. Действительные числа

§1. Целые и рациональные числа	3
§2. Действительные числа	4
§3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	6
§4. Арифметический корень натуральной степени	10
§5. Степень с рациональным и действительным показателями	16
Упражнения к главе I	23

Глава II. Степенная функция

§6. Степенная функция, ее свойства и график	29
§7. Взаимно обратные функции	32
§8. Равносильные уравнения и неравенства	35
§9. Иррациональные уравнения	37
§10. Иррациональные неравенства	41
Упражнения к главе II	44

Глава III. Показательная функция

§11. Показательная функция, ее свойства и график	49
§12. Показательные уравнения	51
§13. Показательные неравенства	57
§14. Системы показательных уравнений и неравенств	60
Упражнения к главе III	61

Глава IV. Логарифмическая функция

§15. Логарифмы	65
§16. Свойства логарифмов	70
§17. Десятичные и натуральные логарифмы	72
§18. Логарифмическая функция, ее свойства и график	74
§19. Логарифмические уравнения	77
§20. Логарифмические неравенства	81
Упражнения к главе IV	85

Глава V. Тригонометрические формулы

§21. Радианная мера угла	97
§22. Поворот точки вокруг начала координат	98
§23. Определение синуса, косинуса и тангенса угла	101
§24. Знаки синуса, косинуса и тангенса	104
§25. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом	106
§26. Тригонометрические тождества	107
§27. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$	110
§28. Формулы сложения	112
§29. Синус, косинус и тангенс двойного угла	116
§30. Синус, косинус и тангенс половинного угла	120
§31. Формулы приведения	124
§32. Сумма и разность синусов и косинусов	129
Упражнения к главе V	132

Глава VI. Тригонометрические уравнения

§33. Уравнение $\cos x = a$	137
§34. Уравнение $\sin x = a$	142

§35. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$	149
§36. Решение тригонометрических уравнений	153
§37. Примеры решения тригонометрических неравенств	162
Упражнения к главе VI	164
Глава VII. Тригонометрические функции	
§38. Область определения и множество значений	175
§39. Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций	178
§40. Свойства функции $y = \cos x$ и ее график	181
§41. Свойства функции $y = \sin x$ и ее график	185
§42. Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее график	187
§43. Обратные тригонометрические функции	191
Упражнения к главе VII	194
Глава VIII. Производная и ее геометрический смысл	
§44. Производная	200
§45. Производная степенной функции	201
§46. Правила дифференцирования	204
§47. Производная некоторых элементарных функций	211
§48. Геометрический смысл производной	218
Упражнения к главе VIII	224
Глава IX. Применение производной к исследованию функций	
§49. Возрастание и убывание функции	231
§50. Экстремумы функции	234
§51. Применение производной к построению графиков функций	239
§52. Наибольшее и наименьшее значения функции	245
§53. Выпуклость графика функции, точки перегиба	247
Упражнения к главе IX	248
Глава X. Интеграл	
§54. Первообразная	254
§55. Правила нахождения первообразных	255
§56. Площадь криволинейной трапеции и интеграл	259
§57. Вычисление интегралов	261
§58. Вычисление площадей с помощью интегралов	264
§59. Применение производной и интеграла к решению задач	368
Упражнения к главе X	269
Упражнения для итогового повторения	
1. Числа и алгебраические преобразования	275
2. Уравнения	291
3. Неравенства	305
4. Системы уравнений и неравенств	309
5. Текстовые задачи	314
6. Функции и графики	316
7. Производная и интеграл	325
8. Задания, предлагавшиеся на выпускных экзаменах	327
Задачи для внеклассной работы	334

Учебно-методическое издание

Сам себе репетитор®

Щеглова Александра Павловна

**ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ
ИЗ УЧЕБНИКА
ПО АЛГЕБРЕ
И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА**

**Ш.А. Алимова, Ю.Н. Колягина
(М.: Просвещение)**

10–11 классы

Дизайн обложки Екатерины Бедриной

Налоговая льгота – ОКП 005-93-953 (Литература учебная).
Издательство «ВАКО»

Подписано к печати с диапозитивов 28.02.2007.
Формат 70*100/32. Печать офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 14,3.
Тираж 15 000 экз. Заказ № 18678.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Саратовский полиграфический комбинат»
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59
www.sarpk.ru