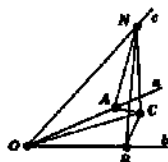


§ 5. Многоугольники

1. Решение задачи в учебнике Погорелова.
2. Решение задачи в учебнике Погорелова.
3. Обозначим через (abc) заданный трехгранный угол, где $\angle(ab) = \gamma$.



Тогда из произвольной точки N ребра c опустим перпендикуляры NA , NC , NB на ребра a , b и плоскость угла (ab) . Поскольку NC — перпендикуляр к плоскости угла (ab) , то BC и AC — проекции наклонных NB и NA на плоскость $\angle(ab)$. По теореме о трех перпендикулярах $AC \perp a$, $BC \perp b$, $\angle NAC = \angle NBC = \varphi$, $\triangle NCA = \triangle NCB$ по общему катету NC и равным острым углам NAC и NBC .

Таким образом, $\triangle OAC \cong \triangle OBC$ по катету и общей гипотенузе.

$$\angle AOC = \angle COB = \frac{\gamma}{2}, \quad \angle(bc) = \alpha. \quad \operatorname{tg} \alpha = NB : OB = \frac{BC}{\cos \gamma} : \frac{BC}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma}.$$

$$\angle(ca) = \angle(bc) = \alpha.$$

OC — проекция наклонной ON на плоскость $P(ab)$, $\angle PNO$ — угол между ребром c и плоскостью $P(ab)$, $\angle PNO = \beta$,

$$\operatorname{tg} \beta = NC : OC = BC \operatorname{tg} \varphi : \frac{BC}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \operatorname{tg} \varphi \sin \frac{\gamma}{2}.$$

- 4*. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. По тем же соображениям $\angle(ac) = \angle(cb) = \alpha$, $\angle(ab) = \gamma$.

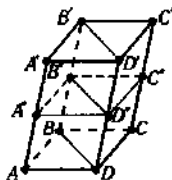
Пусть точка N — произвольная точка на ребре c .

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } \cos \varphi &= BC : NB = OB \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} : OB \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \alpha} \cos \beta = OC : ON = \\ &= OB \cos \alpha : OB \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\gamma}{2}}. \end{aligned}$$

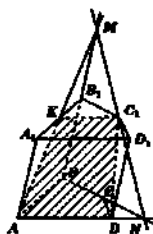
5. Пусть $ABCA'B'C'D'$ — призма, $A''B''C''D''$ — пересечение призмы плоскостью, параллельной основаниям. Плоскости ABC и $A''B''C''$ совмещаются параллельным пересечением. При этом точка A'' совмещается с A , B'' с B , C'' с C и D'' с D . Таким образом, четырехугольники $A''B''C''D''$ и $ABCD$ равны.

6. Из каждой вершины призмы можно провести $(n-3)$ диагоналей. Поскольку вершин $2n$, и из них каждая диагональ соединяет две вершины, то имеем $n(n-3)$ диагоналей.

7. Пусть $ABCA_1B_1C_1D_1$ — четырехугольная призма. Построим сечение, проходящее через сторону AD основания и вершину C_1 второго основания.

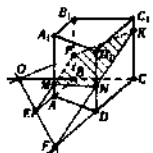


Если $AD \parallel BC$, то есть $AD \parallel B_1C_1$, то ADC_1B_1 — искомое сечение. В общем случае точки C_1 и D принадлежат и плоскости сечения, и



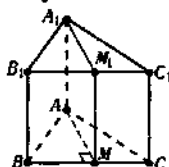
плоскости грани CC_1D_1D , C_1D — прямая пересечения плоскости искомого сечения и грани призмы. Найдем точку N пересечения прямых AD и BC . Эта точка принадлежит и плоскости сечения, и плоскости грани BB_1C_1C призмы. В плоскости BB_1C_1C можно построить прямую C_1N , которая также принадлежит плоскости сечения. Найдем точку M пересечения прямых BB_1 и C_1N . Точка M принадлежит и плоскости сечения, и грани AA_1B_1B призмы. В плоскости AA_1B_1B можно построить прямую AM , принадлежащую и плоскости пересечения. Эта прямая пересечет ребро A_1B_1 призмы в некоторой точке K . AK — пересечение плоскости сечения с гранью AA_1B_1B призмы, KC_1 — пересечение плоскости сечения с гранью $A_1B_1C_1D_1$ призмы. Таким образом, AKC_1D — искомое сечение.

8. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — четырехугольная призма. Точки M , N , K принадлежат ребрам призмы AA_1 , DD_1 и C_1C . Найдем сечение призмы плоскостью MNK . Точки M и N принадлежат плоскости сечения и плоскости грани AA_1D_1D , MN — пересечение грани AA_1D_1D с секущей плоскостью, KN — пересечение грани CC_1D_1D с секущей плоскостью. Найдем точки F и E пересечения прямых KN и CD и MN и AD соответственно. Эти точки принадлежат и секущей плоскости, и плоскости основания призмы.



В плоскости основания найдем точку O пересечения прямых BC и FE . Эта точка принадлежит плоскости грани BB_1C_1C призмы и секущей плоскости. Прямая OK является прямой пересечения секущей плоскости и плоскости грани BB_1C_1C . Она пересечет ребро BB_1 призмы в некоторой точке P . PK — сечение секущей плоскости и грани BB_1C_1C ; MP — сечение секущей плоскости и плоскости грани AA_1B_1B . Таким образом, $MPKN$ — искомое сечение.

9. Плоскость, перпендикулярная одной из параллельных прямых, перпендикулярна и другой. Поскольку боковые ребра призмы параллельны и одно из них перпендикулярно основанию призмы, то и остальные боковые ребра также перпендикулярны основанию.
10. По условию $AB = 10$ см, $AC = 17$ см, $BC = 21$ см. В треугольнике наименьшая высота опущена на наибольшую сторону, то есть это AM . Проведем плоскость через точки A , A_1 и M . Эта плоскость пересечет грань BB_1C_1C призмы по прямой MM_1 . Прямые AA_1 и MM_1 лежат в одной плоскости и не пересекаются, поэтому $AA_1 \parallel MM_1$.



По формуле Герона найдем S_{ABC} :

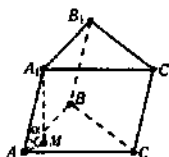
$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}, \text{ где } p = \frac{AB+AC+BC}{2},$$

$$p = \frac{10+17+21}{2} = 24 \text{ (см)}. S = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Но } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM, AM = \frac{2S_{ABC}}{BC}, AM = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8 \text{ (см)},$$

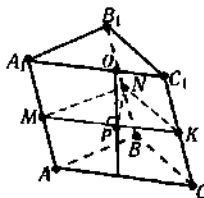
Площадь сечения $S_{AMM_1A_1} = AA_1 \cdot AM = 18 \cdot 8 = 144 \text{ (см}^2\text{)}$.

11. Из вершины A_1 призмы опустим перпендикуляр A_1M на основание $ABCD$ призмы. A_1M — высота призмы, A_1A — наклонная, AM — ее проекция, $\angle A_1AM$ — угол между ребром A_1A призмы и плоскостью основания $ABCD$. По условию $AA_1 = 15 \text{ см}$, $\angle A_1AM = 30^\circ$.



$$\text{Для } \triangle AA_1M \angle A_1MA = 90^\circ, A_1M = A_1A \cdot \sin \angle A_1AM = 15 \cdot \frac{1}{2} = 7,5 \text{ (см)}.$$

- 12*. Из произвольной точки M на ребре AA_1 опустим перпендикуляры MN и MK на ребра BB_1 и CC_1 соответственно. Поскольку $AA_1 \parallel BB_1$ и $AA_1 \parallel CC_1$, то $MN \perp AA_1$ и $MK \perp AA_1$. Плоскость MNK перпендикулярна ребру AA_1 , а следовательно, перпендикулярна и параллельным ему ребрам BB_1 и CC_1 .



Тогда $NK \perp BB_1$ и $NK \perp CC_1$. Пусть $MK = 40 \text{ см}$, $MN = 37 \text{ см}$, $NK = 13 \text{ см}$. Ясно, что наибольшая боковая грань призмы — AA_1C_1C .

Из произвольной точки N на ребре BB_1 опустим перпендикуляр NP на сторону MK $\triangle MNK$. Через прямые BB_1 и NP проведем плоскость. Она пересечет грань AA_1C_1C по некоторой прямой OP , параллельной BB_1 , следовательно, и CC_1 . Так как ребро CC_1 перпендикулярно плоскости MNK , то прямая $OP \perp (MNK)$, откуда $OP \perp MK$, кроме того, MK — прямая пересечения плоскостей MNK и AA_1C_1C , плоскость NPO перпендикулярна MK . Поскольку $NP \perp OP$, то плоскости MNK и AA_1C_1C перпендикулярны, NP — расстояние от ребра BB_1 до плоскости AA_1C_1C .

По формуле Герона найдем площадь $\triangle MNK$:

$$S = \sqrt{p(p - MN)(p - NK)(p - MK)}, p = \frac{40 + 13 + 37}{2} = 45 \text{ (см)}.$$

$$S = \sqrt{45 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 32} = 240 \text{ (см}^2\text{)}. \text{ Но } S = \frac{1}{2} NP \cdot MK, NP = \frac{2S}{MK}, NP = \frac{2 \cdot 240}{40} = 12 \text{ (см)}.$$

13. Пусть $ABCDEF, A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — призма, в основании которой лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной a . Боковые грани — квадраты. Обозначим через O точку пересечения больших диагоналей правильного шестиугольника. О является центром описанной вокруг шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ окружности.

Имеем: $OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1 = OE_1 = OF_1 = R$, где R — радиус окружности, $R = a$. Тогда $F_1C_1 = 2a = FC$. Так как призма прямая, то FF_1C_1C — прямоугольник.

$S_{FF_1CC_1} = 2a \cdot a = 2a^2$. FC_1 — гипотенуза прямоугольного $\triangle FF_1C_1$,

$$\angle F_1 = 90^\circ, FC_1 = \sqrt{FF_1^2 + F_1C_1^2}, FC_1 = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}.$$

Рассмотрим $\triangle E_1F_1A_1$, $E_1F_1 = F_1A_1$, F_1K — биссектриса, медиана и высота треугольника. $\angle A_1F_1E_1 = 120^\circ$, $\angle A_1F_1K = \angle E_1F_1K = 60^\circ$. В $\triangle E_1KF_1$, $\angle K = 90^\circ$, $E_1K = E_1F_1 \cdot \sin \angle F_1$.

$$E_1K = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, E_1A_1 = 2E_1K = a\sqrt{3}, EE_1C_1C —$$

прямоугольник.

$S_{EE_1CC_1} = a \cdot a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$. EC_1 — гипотенуза прямоугольного треугольника EE_1C_1 ,

$$EC_1 = \sqrt{EE_1^2 + E_1C_1^2}, EC_1 = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a.$$

- 14*. Пусть $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — призма, в основании которой лежит правильный шестиугольник со стороной a , а боковые грани — квадраты. $FA_2B_1C_1D_2E$ — сечение, площадь которого нужно найти.

Основание призмы можно разбить на шесть равных правильных треугольников со стороной a .

Площадь правильного треугольника:

$$S_{\triangle} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \text{ откуда } S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{\triangle} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Диагональ призмы B_1F принадлежит плоскости сечения. Поскольку призма прямая, то B_1B — перпендикуляр, BF — проекция наклонной B_1F на плоскость основания. $\angle B_1FB$ — угол между плоскостями сечения и основания, обозначим его $\angle \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{BF}{B_1F}, BF = a\sqrt{3}, B_1F = 2a \text{ (смотри предыдущую задачу)}.$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Поскольку призма прямая, то } ABCDEF — \text{ ортогональная}$$

проекция сечения $FA_2B_1C_1D_2E$ на плоскость основания.

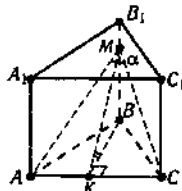
$$S_{ABCDEF} = S_{FA_2B_1C_1D_2E} \cdot \cos \alpha, S_{FA_2B_1C_1D_2E} = \frac{S_{ABCDEF}}{\cos \alpha} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 3a^2.$$

15. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, сторона основания которой равна a . Плоскость AMC пересекает боковые грани призмы AA_1B_1B и BB_1C_1C по отрезкам AM и MC . $\angle AMC = \alpha$.

В $\triangle ABC$ BK — медиана, высота и биссектриса.

Из $\triangle ABK$, $\angle AKB = 90^\circ$, $\angle ABK = 30^\circ$ найдем BK :

$$BK = AB \cos \angle ABK = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. MB — \text{ перпендикуляр, } MK — \text{ на}$$

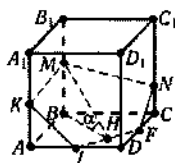


клонная, BK — ее проекция. По теореме о трех перпендикулярах $MK \perp AC$, то есть MK — высота $\triangle AMC$, а также его медиана, поскольку K — середина AC . Таким образом, в $\triangle AMC$ $AM = MC$, MK — биссектриса $\angle AMC$, $\angle AMK = \frac{\alpha}{2}$. Из

$\triangle AMK$, $\angle K = 90^\circ$, $AK = \frac{a}{2}$ найдем MK : $MK =$

$$\frac{AK}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}. \text{ Из треугольника } MBK \text{ имеем: } \angle B = 90^\circ, \cos \angle K = \frac{BK}{MK} \\ = a \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{a} = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

16. Пусть $ABCA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма, в основании которой лежит квадрат со стороной a . L и F — середины сторон основания AD и DC . Плоскость сечения $LKMNF$ наклонена к основанию под углом α . Поскольку призма прямая, то $ABCFL$ — ортогональная проекция сечения на плоскость основания.



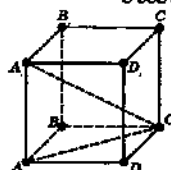
$$S_{ABCFL} = S_{LKMNF} \cdot \cos \alpha, S_{LKMNF} = \frac{S_{ABCFL}}{\cos \alpha}. \text{ Рассмотрим}$$

$$\triangle LFD: \angle D = 90^\circ, LD = DF = \frac{a}{2}, S_{LFD} = \frac{1}{2}(LD)^2, S_{LFD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8}.$$

$$S_{ABCD} = a^2, S_{ABCFL} = S_{ABCD} - S_{LFD}. \quad S_{ABCFL} = a^2 - \frac{a^2}{8} = \frac{7a^2}{8}.$$

$$S_{LKMNF} = \frac{7a^2}{8 \cos \alpha}.$$

17.

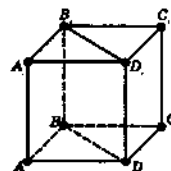


Пусть $ABCA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма; AA_1 — высота, $AA_1 = 14$ см, $S_{ABCD} = 144$ см², $AB = BC = CD = AD = 12$ см. Тогда $AC = \sqrt{2} \cdot AB$, $AC = 12\sqrt{2}$ см.

Из треугольника AA_1C : $\angle A = 90^\circ$ по теореме Пифагора:

$$A_1C = \sqrt{AC^2 + AA_1^2}, A_1C = \sqrt{288 + 196} = 22 \text{ (см)}.$$

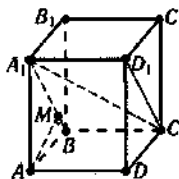
18.



Имеем: $ABCA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма. Пусть сторона основания призмы a , высота призмы H . Площадь боковой грани $a \cdot H = Q$. Диагональ основания призмы равна $a\sqrt{2}$. BB_1D_1D — диагональное пересечение призмы. Ее площадь $a\sqrt{2} \cdot H = Q\sqrt{2}$.

- 19*. $ABCA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма. Сторона основания равна 15, а высота призмы 20.

Расстояние от стороны AD основания до диагонали A_1C — это расстояние от стороны AD до плоскости A_1BCD_1 , в которой лежит диагональ A_1C . Плоскость A_1BCD_1 проходит через прямую A_1D_1 , которая перпендикулярна к грани AA_1B_1B призмы. Таким образом, плоскости A_1BCD_1 и AA_1B_1B перпендикулярны. В плоскости AA_1B_1B опустим перпендикуляр AM на прямую A_1B пересечения плоскостей A_1BC и AA_1B_1 . AM — искомое расстояние.



Из $\triangle AA_1B$, ($\angle A = 90^\circ$): $A_1B = \sqrt{AA_1^2 + AB^2}$, $A_1B = \sqrt{225 + 400} = 25$. Прямоугольные треугольники AA_1B и AA_1M подобны, так как $\angle AA_1M$ общий.

$$\frac{A_1B}{AA_1} = \frac{AB}{AM}, AM = \frac{AA_1 \cdot AB}{A_1B}, AM = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12.$$

20. Имеем прямую треугольную призму, в которой все ребра равны, боковые грани — равные квадраты. Площадь одной грани $S_{\text{пр}} = \frac{1}{3} S_6$, где $S_6 = 12 \text{ м}^2$, $S_{\text{пр}} = 4 \text{ м}^2$. Высота призмы $H = \sqrt{S_{\text{пр}}} = 2 \text{ м}$.

21. В правильной четырехугольной призме боковые грани — равные прямоугольники, основания — равные квадраты. Площадь боковой грани $S_{\text{пр}} = aH$, где a — сторона основания, H — высота призмы.

Площадь основания $S_{\text{осн}} = a^2$. Полная поверхность $S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + 4S_{\text{пр}} = 40 \text{ м}^2$, боковая поверхность $S_6 = 4S_{\text{пр}} = 32 \text{ м}^2$. Таким образом, $S_{\text{осн}} = \frac{S_{\text{полн}} - S_6}{2} = \frac{40 - 32}{2} = 4 \text{ (м}^2\text{)}$, $a = \sqrt{S_{\text{осн}}} = \sqrt{4} = 2 \text{ (м)}$, площадь боковой

грани $S_{\text{пр}} = \frac{1}{4} S_6 = \frac{1}{4} \cdot 32 = 8 \text{ (м}^2\text{)}$, $H = \frac{S_{\text{пр}}}{a}$, $H = \frac{8}{2} = 4 \text{ (м)}$.

- 22*. Задача решена в учебнике Погорелова.

23. Боковые грани призмы — параллелограммы. Расстояния между параллельными прямыми, частью которых являются боковые ребра призмы, это высоты боковых граней $h_1 = 2 \text{ см}$, $h_2 = 3 \text{ см}$, $h_3 = 4 \text{ см}$, боковое ребро призмы равно 5 см . Соответственно площади боковых граней $S_1 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ (см}^2\text{)}$; $S_2 = 3 \cdot 5 = 15 \text{ (см}^2\text{)}$, $S_3 = 4 \cdot 5 = 20 \text{ (см}^2\text{)}$. Боковая поверхность призмы $S_6 = S_1 + S_2 + S_3 = 10 + 15 + 20 = 45 \text{ (см}^2\text{)}$.

24. 1) Сторона основания правильной треугольной призмы равна a , а боковое ребро равно b . Так как основание призмы — правильный треугольник, то $S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$. Боковые грани призмы являются

равными прямоугольниками со сторонами a и b . Боковая поверхность призмы $S_6 = 3S_{\text{пр}} = 3 \cdot a \cdot b$. Полная поверхность призмы

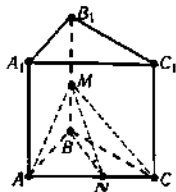
$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_6 = 3ab + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

- 2) Для правильной четырехугольной призмы $S_{\text{осн}} = a^2$, $S_6 = 4S_{\text{пр}} = 4ab$, $S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_6 = 4ab + 2a^2$.

- 3) Для правильной шестиугольной призмы $S_{\text{осн}} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$ (смотри задачу 14).

$$S_0 = 6S_{\text{ст}} = 6ab, S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_0 = 3\sqrt{3}a^2 + 6ab.$$

25. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, сторона основания которой l . M — середина ребра B_1B . Плоскость AMC пересекает грани AA_1B_1B и BB_1C_1C по отрезкам AM и MC . В $\triangle ABC$ проведем медиану BN , она же является и



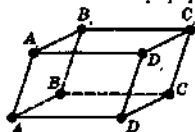
высотой, $BN = AB$; $\sin \angle A = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ ($\angle A = 60^\circ$, так как

$\triangle ABC$ — правильный).

MB — перпендикуляр к плоскости ABC , MN — наклонная, BN — ее проекция. Поскольку $BN \perp AC$, то по теореме о трех перпендикулярах $MN \perp AC$. $\angle MNB$ — угол между плоскостями AMC и ABC , $\angle MNB = 45^\circ$. Прямоугольный треугольник MBN равнобедренный.

$MB = BN = l \frac{\sqrt{3}}{2}$. $BB_1 = 2MB = l\sqrt{3}$. BB_1 — высота призмы. Боковая поверхность $S_0 = BB_1 \cdot P$, где P — периметр основания, $P = 3l$. $S_0 = 3l\sqrt{3} = 3l^2\sqrt{3}$.

26. Пусть $ABCA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. $S_{AA_1D_1B} = 1 \text{ м}^2$, $S_{DD_1C_1C} = 2 \text{ м}^2$,



$S_{ABCD} = 3 \text{ м}^2$. Противоположные грани параллеле-

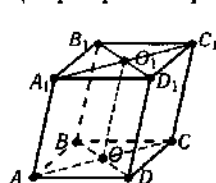
пипеда равны. $S_{BB_1C_1C} = S_{AA_1D_1D} = 1 \text{ м}^2$,

$S_{AA_1B_1B} = S_{DD_1C_1C} = 2 \text{ м}^2$, $S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} = 3 \text{ м}^2$.

$S_{\text{полн}} = 2S_{AA_1D_1D} + 2S_{DD_1C_1C} + 2S_{ABCD} = 2 + 4 + 6 = 12 \text{ (м}^2\text{)}.$

27. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. Пусть $\angle A_1AD = \alpha$, $\angle A_1AB = \beta$, $\angle BAD = \gamma$. Найдем углы, сходящиеся в точке D_1 . Из параллелограмма AA_1D_1D $\angle A_1D_1D = \angle A_1AD = \alpha$. Поскольку противоположные грани параллелепипеда равны, то $\angle A_1D_1C_1 = \angle ADC = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \gamma$, $\angle C_1D_1D = \angle B_1A_1A = 180^\circ - \angle A_1AB = 180^\circ - \beta$.

28. $ABCA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Все его грани — параллелограммы. Центр параллелограмма — точка пересечения его диагоналей. O и



O_1 — центры оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Противоположные грани параллелепипеда совмещаются параллельным переносом. Таким образом, $BD \parallel B_1D_1$ и $BD = B_1D_1$, так как диагонали параллелепипеда в точке пересечения делятся пополам, то $O_1D_1 = OD$ и $B_1D_1 \parallel OD$. Таким образом, четырехугольник OO_1D_1D — параллелограмм, то есть $OO_1 \parallel DD_1$.

29. Имеем $ABCA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, в основании которого лежит параллелограмм $ABCD$, $AB = 6 \text{ м}$, $AD = 8 \text{ м}$, $\angle BAD = 30^\circ$, боковое ребро $AA_1 = 5 \text{ м}$.

$$S_{\text{осн}} = AB \cdot AD \sin \angle BAD,$$

$$S_{\text{осн}} = 6 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24 \text{ (м}^2\text{)}.$$

$S_6 = P \cdot H$, где H — высота параллелепипеда,
 $H = 5$ м,

P — периметр основания $P = (AB + AD) =$
 $= 2(6 + 8) = 28 \text{ (м)}.$

$$S_6 = 5 \cdot 28 = 140 \text{ (м}^2\text{)}.$$

$$S_{\text{полн}} = S_6 + 2S_{\text{осн}} = 140 + 2 \cdot 24 = 188 \text{ (м}^2\text{)}.$$

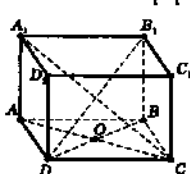
30. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче.

$AB = 3$ см, $AD = 8$ см, $\angle BAD = 60^\circ$, $S_6 = 220$ см².

$$S_{\text{осн}} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD; S_{\text{осн}} = 3 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 12\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_6 = 2 \cdot 12\sqrt{3} + 220 = 24\sqrt{3} + 220 \approx 262 \text{ (см}^2\text{)}.$$

31. Имеем $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямой параллелепипед.



$AB = 3$ см, $AD = 5$ см. Одна из диагоналей основания равна 4 см. Пусть $\angle BAD$ — острый, тогда $\angle ABC$ — тупой. В $\triangle ABC$ сторона AC , лежащая напротив тупого угла, должна быть наибольшей. Так как $BC = AD = 5$ см, то AC не может быть равна 4 см, поскольку $BD = 4$ см. BB_1 и AA_1 — перпендикуляры, $BB_1 = AA_1$, $B_1 D$ и $A_1 C$ — наклонные, BD и AC — их проекции. Так

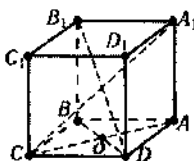
как $AC > BD$, то $A_1 C > B_1 D$, $\angle B_1 D B$ — угол между диагональю $B_1 D$ и плоскостью основания. $\angle B_1 D B = 60^\circ$. Из $\triangle BB_1 D$, $\angle B_1 B D = 90^\circ$, $BB_1 =$
 $= BD \cdot \operatorname{tg} \angle B_1 D B$, $AA_1 = BB_1 = 4 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3}$ (см). Согласно следствию из теоремы косинусов имеем:

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2), AC = \sqrt{2(AB^2 + AD^2) - BD^2},$$

$$AC = \sqrt{2(9 + 25) - 16} = 2\sqrt{13} \text{ (см)}. \text{ Из } \triangle AA_1 C, \angle A_1 A C = 90^\circ.$$

$$A_1 C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2}; \text{ откуда } A_1 C = \sqrt{48 + 52} = 10 \text{ (м)}.$$

32. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямой параллелепипед. $AB = AD = AA_1 = a$, $\angle BAD = 60^\circ$.



В $\triangle ABC$ $AB = AD$ и угол при вершине 60° , поэтому $\triangle ABC$ — правильный, $BD = AB = a$.

Из $\triangle BB_1 D$, $\angle B_1 B D = 90^\circ$, $BB_1 = AA_1 = a$. $B_1 D =$
 $= \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Рассмотрим $\triangle ABO$, $\angle AOB = 90^\circ$, так как $ABCD$ — ромб.

$$AO = \sqrt{AB^2 - OB^2}; OB = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} a.$$

$$AO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AC = 2 \cdot AO = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Рассмотрим } \triangle AA_1 C, \angle A_1 A C = 90^\circ, A_1 C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2}, A_1 C =$$

$$= \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a.$$

33. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. $AA_1 = 5$ м, $AB = 6$ м, $AD = 8$ м.

Одна из диагоналей основания $d_1 = 12$ м. По следствию из теоремы косинусов найдем вторую диагональ:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(AB^2 + AD^2), d_2 = \sqrt{2(AB^2 + AD^2) - d_1^2}, d_2 = \sqrt{2(36 + 64) - 144} = \sqrt{56} \text{ (м)}.$$

Пусть $AC = 12$ м, $BD = \sqrt{56}$ м. Из $\triangle A_1AC$, $\angle A_1AC = 90^\circ$:

$$A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2}, A_1C = \sqrt{25 + 144} = 13 \text{ (м)}. \text{ Из } \triangle BB_1D, \angle B_1BD =$$

$$= 90^\circ, \text{ найдем } B_1D: B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2}, B_1D = \sqrt{25 + 56} = \sqrt{81} = 9 \text{ (м)}.$$

34. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямой параллелепипед. $AA_1 = 1$ м, $AB = 23$ дм $= 2,3$ м, $AD = 11$ дм $= 1,1$ м. $BD : AC = 2 : 3$.

Пусть $BD = 2x$ м, тогда $AC = 3x$ м, $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

$$9x^2 + 4x^2 = 2(5,29 + 1,21); x^2 = 1, x = 1.$$

Таким образом, $BD = 2$ м, $AC = 3$ м.

AA_1C_1C и BB_1D_1D — диагональные сечения прямого параллелепипеда, которые являются прямоугольниками.

$$S_{AA_1CC_1} = AA_1 \cdot AC = 1 \cdot 3 = 3 \text{ (м}^2\text{)}. S_{BB_1D_1D} = B_1B \cdot BD = 1 \cdot 2 = 2 \text{ (м}^2\text{)}.$$

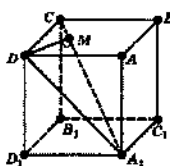
35. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений a , b и c .

$$1) a = 1, b = 2, c = 2, d^2 = a^2 + b^2 + c^2, d = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

$$2) a = 2, b = 3, c = 6, d = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7.$$

$$3) a = 6, b = 6, c = 7, d = \sqrt{36 + 36 + 49} = 11.$$

- 36*. По условию $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб с ребром a . Диагональ куба



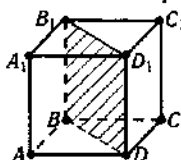
$A_1C = \sqrt{3}a$. Через диагональ A_1C и вершину D проведем плоскость. Она пересечет грань AA_1D_1D куба по отрезку A_1D . В $\triangle A_1CD$ $\angle A_1DC = 90^\circ$, опустим перпендикуляр DM .

$\triangle A_1CD \sim \triangle DMC$, поскольку $\angle DMC = \angle A_1DC = 90^\circ$, $\angle A_1CD$ — общий.

$$\frac{A_1C}{DC} = \frac{A_1D}{MD}, MD = \frac{DC \cdot A_1D}{A_1C}. A_1D — диагональ$$

$$\text{квадрата со стороной } a, A_1D = a\sqrt{2}; MD = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

37. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед. $AB = 7$ дм, $AD = 24$ дм, $AA_1 = 8$ дм.



BB_1D_1D — диагональное сечение. Оно является прямоугольником. $S_{BB_1D_1D} = B_1B \cdot BD$. $B_1B = AA_1 = 8$ дм, BD найдем из $\triangle ABD$, $\angle BAD = 90^\circ$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$.

$$BD = \sqrt{49 + 576} = 25 \text{ (дм)}. S_{BB_1D_1D} = 8 \cdot 25 = 200 \text{ (дм}^2\text{)}.$$

38. Пусть $ABCD, B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед.

Пусть $AB = 10$ см, $AD = 22$ см, $AA_1 = 16$ см.

$$S_{\text{осн}} = AB \cdot AD; S_{\text{осн}} = 10 \cdot 22 = 220 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_6 = AA_1 \cdot P, \text{ где } P = 2(AB + AD). P = 2(10 + 22) = 64 \text{ (см)}.$$

$$S_6 = 16 \cdot 64 = 1024 \text{ (см}^2\text{)}. S_{\text{полн}} = S_6 + 2S_{\text{осн}}$$

$$S_{\text{полн}} = 1024 + 2 \cdot 220 = 1464 \text{ (см}^2\text{)}.$$

39. Воспользуемся рисунком к задаче 37. $AA_1 = h$, $S_{BB_1D_1D} = M$, $S_{ABCD} = Q$.

Пусть $AB = a$, $AD = b$, тогда $\begin{cases} ab = Q, \\ \sqrt{a^2 + b^2} \cdot h = M; \end{cases} \begin{cases} 2ab = 2Q; \\ a^2 + b^2 = \frac{M^2}{h^2}; \end{cases}$

$$= 2Q + \frac{M^2}{h^2}; \text{ боковая поверхность параллелепипеда } S_6 = 2h(a + b);$$

$$S_6^2 = \frac{4h^2(a + b)^2}{2\sqrt{M^2 + 2Qh^2}} = 4h^2 \left(2Q + \frac{M^2}{h^2} \right) = 8Qh^2 + 4M^2, S_6 =$$

40. Пусть $ABCD, B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. AD_1 , B_1D и D_1C — диагонали боковых граней AA_1D_1D , $A_1B_1C_1D_1$ и DD_1C_1C соответственно. $AD_1 = a$, $B_1D_1 = c$, $D_1C = b$.

Обозначим $AD = x$, $D_1D = y$, $DC = z$. Тогда $x^2 +$

$$y^2 = a^2, y^2 + z^2 = b^2, x^2 + z^2 = c^2.$$

$$2x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + c^2, 2x^2 = a^2 + c^2 - b^2, x =$$

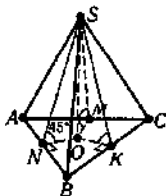
$$= \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}},$$

$$2y^2 + x^2 + z^2 = a^2 + b^2, 2y^2 = a^2 + b^2 - c^2, y =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}},$$

$$2z^2 + x^2 + y^2 = b^2 + c^2, 2z^2 = b^2 + c^2 - a^2, z = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}.$$

41. Пусть $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$, $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. SO — высота пирамиды.



Опустим перпендикуляры SN , SK и SM на ребра AB , BC и AC пирамиды. ON , OK и OM — их проекции на основание пирамиды. По теореме о трех перпендикулярах $ON \perp AB$, $OK \perp BC$, $OM \perp AC$, $\angle SNO$, $\angle SKO$ и $\angle SMO$ — углы между гранями SAB , SBC и SAC и основанием. По условию задачи $\angle SNO = \angle SKO = \angle SMO = 45^\circ$. $\triangle SNO = \triangle SKO = \triangle SMO$, так как $\angle SON = \angle SOK = \angle SOM = 90^\circ$, SO — общий катет. Таким образом, $ON = OK = OM$, точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности. По формуле Герона:

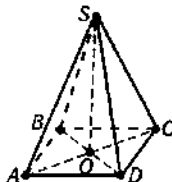
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)}, \text{ где } p = \frac{AB + BC + AC}{2},$$

$$p = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16 \text{ (см)}.$$

$S_{ABC} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48 \text{ (см}^2\text{)}$. Но $S_{ABC} = pr$, где r — радиус вписанной

окружности. Отсюда $r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{48}{16} = 3 \text{ (см)}$. $OM = 3 \text{ см}$. Прямоугольный $\triangle SOM$ является равнобедренным, поскольку $\angle SMO = \angle MSO = 45^\circ$. Таким образом, $SO = OM = 3 \text{ см}$.

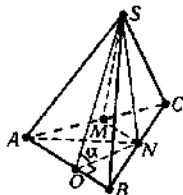
42. $SABCD$ — пирамида, в основании которой лежит прямоугольник $ABCD$, $AB = 6 \text{ см}$, $BC = 8 \text{ см}$. $SA = SB = SC = SD = 13 \text{ см}$. SO — высота пирамиды. OB , OC , OD и OA — проекции соответствующих боковых ребер на плоскость основания. Поскольку боковые ребра пирамиды равны, то $OB = OC = OD = OA$. Так как диагонали прямоугольника равны и в точке пересечения делятся пополам, точка O является точкой пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$.



Из $\triangle ABD$, $\angle BAD = 90^\circ$: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$,
 $BD = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ (см)}$. $BO = OD = 5 \text{ см}$. Из $\triangle SBO$, $\angle SOB = 90^\circ$:

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}; SO = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ (см)}.$$

43. Пусть $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит правильный $\triangle ABC$.



Грань SAB пирамиды перпендикулярна основанию. SO — высота пирамиды и она принадлежит грани SAB . Опустим перпендикуляры SM и SN на ребра AC и BC пирамиды. OM и ON — их проекции. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AC$ и $ON \perp BC$. $\angle SMO$ и $\angle SNO$ — углы между гранями SAC и SBC пирамиды и ее основанием. По условию задачи $\angle SMO = \angle SNO = \alpha$.

$\triangle SOM = \triangle SON$, поскольку $\angle SOM = \angle SON = 90^\circ$, SO — общий катет. Таким образом, $SM = SN$.

Треугольники SAC и SBC имеют одинаковую площадь ($AC = BC$ по условию задачи). SC — общая сторона. Таким образом, $\angle SCA = \angle SCB$, так как площадь треугольника равна полупроизведению двух сторон на синус угла между ними.

$\triangle SAC = \triangle SCB$ по двум сторонам и углу между ними. Имеем $SA = SB$, AO и OB — их проекции, таким образом: $AO = OB$. CO — медиана, высота и биссектриса $\triangle ABC$. Пусть сторона треугольника равна a . Тогда $OC = BC \cdot \sin 60^\circ = a \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Из $\triangle CON$, $\angle CNO = 90^\circ$, $\angle OCN = 30^\circ$, найдем ON : $ON = OC \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

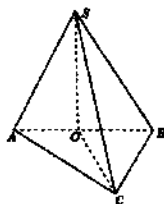
$$\triangle SON, \angle SON = 90^\circ, SO = ON \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\triangle SCO, \angle SOC = 90^\circ, \operatorname{tg} \angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4} \operatorname{tg} \alpha}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\triangle SBO, \angle SOB = 90^\circ, \operatorname{tg} \angle SBO = \frac{SO}{OB}, \text{ где } OB = \frac{1}{2} a.$$

$$\operatorname{tg} \angle SBO = \frac{a\sqrt{3}}{4} \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha, \angle SAO = \angle SBO.$$

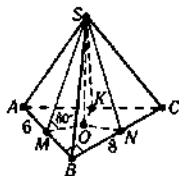
44. Имеем $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = a$. SO — высота пирамиды. OA , OB и OC — проекции боковых ребер пирамиды. $\angle SAO$, $\angle SBO$ и $\angle SCO$ — углы между ребрами SA , SB и SC и основанием призмы.



По условию задачи $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \beta$. $\triangle SOA = \triangle SOB = \triangle SOC$, так как $\angle SOA = \angle SOB = \angle SOC = 90^\circ$, SO — общий катет. Поэтому $OA = OB = OC$. Точка O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности. В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности является серединой гипотенузы. Таким образом, $AO = OB = OC = \frac{a}{2}$.

$$\text{Рассмотрим } \triangle SAO \quad SO = AO \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

45. Пусть $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 8$ см, $BC = 6$ см. SO — высота пирамиды. Опустим перпендикуляры SM , SN и SK на ребра AB , BC и AC пирамиды. OM , ON и OK — их соответствующие проекции. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AB$, $ON \perp BC$ и $OK \perp AC$.



$\angle SMO$, $\angle SNO$ и $\angle SKO$ — углы между боковыми гранями пирамиды и ее основанием. По условию задачи $\angle SMO = \angle SNO = \angle SKO = 60^\circ$. $\angle SOM = \angle SON = \angle SOK = 90^\circ$. SO — общий катет. $\triangle SOM = \triangle SON = \triangle SOK$.

Итак, $OM = ON = OK$. Точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, OM , ON и OK — ее радиусы. $S_{ABC} = p \cdot r$, где $r = OM = ON = OK$, $p = \frac{AB + BC + AC}{2}$.

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}, \quad AB = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ (см)}; \quad p = \frac{10 + 6 + 8}{2} = 12 \text{ (см)}.$$

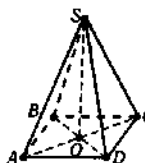
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$r = \frac{S_{ABC}}{p}, \quad r = \frac{24}{12} = 2 \text{ (см)}. \text{ Рассмотрим } \triangle SOK: \angle SOK = 90^\circ, \angle SKO = 60^\circ, \text{ найдем } SO: SO = OK \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

46. Пусть $SABCD$ — пирамида, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, пусть $BD = 6$ см. В соответствии со следствием из теоремы косинусов имеем: $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.

$$AC = \sqrt{2(AB^2 + BC^2) - BD^2} = \sqrt{2(9 + 49) - 36} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ (см)}.$$

SO — высота пирамиды, точка O — точка пересечения диагоналей.



$SO = 4$ см. $AO = OC = 2\sqrt{5}$ см, $BO = OD = 3$ см, так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

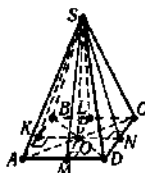
Рассмотрим $\triangle SBO$, $\angle SOB = 90^\circ$, $SB = \sqrt{OB^2 + SO^2}$,

$$SB = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ (см)}.$$

Из $\triangle SAO$ $\angle SOA = 90^\circ$, найдем SA : $SA = \sqrt{SO^2 + AO^2}$,

$$SA = \sqrt{16 + 20} = 6 \text{ (см)}.$$

- 47*. $SABCD$ — пирамида, в основании которой лежит ромб $ABCD$. Его диагонали $BD = 6$ м, $AC = 8$ м. SO — высота пирамиды, точка O — точка пересечения диагоналей ромба. $SO = 1$ м, $AO = OC = 4$ м, $BO = OD = 3$ м. Из $\triangle AOD$, $\angle AOD = 90^\circ$, найдем AD : $AD = \sqrt{AO^2 + OD^2}$, $AD =$



$$= \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ (м)}. AB = BC = DC = AD.$$

ON — высота $\triangle OCD$, она является проекцией наклонной SN . По теореме о трех перпендикулярах $SN \perp DC$, то есть SN — высота $\triangle SDC$.

$\triangle OCD \sim \triangle ONC$, так как $\angle ONC = \angle DOC = 90^\circ$, $\angle OCN$ — общий.

$$\frac{DC}{OC} = \frac{OD}{ON}, ON = \frac{OC \cdot OD}{DC}, ON = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5} \text{ (м)}. \text{ Рассмотрим}$$

$$\triangle SON: \angle SON = 90^\circ, \text{ найдем } SN: SN = \sqrt{OS^2 + ON^2}, SN = \sqrt{1 + \frac{144}{25}} =$$

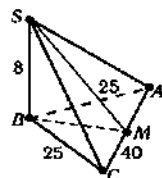
$$= \frac{13}{5} \text{ см. } S_{SCD} = \frac{1}{2} SN \cdot DC, S_{SCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{5} \cdot 5 = \frac{13}{2} \text{ (м}^2\text{)}.$$

$\triangle SOA = \triangle SOC$ по двум катетам (SO — общий, $AO = OC$). Поэтому $SA = SC$. $\triangle SAD = \triangle SDC$ по трем сторонам. То есть $S_{SAD} = S_{SDC}$.

Аналогично доказываем, что $S_{ABS} = S_{ASC} = S_{SAD} = S_{SDC}$, то есть боковая

поверхность пирамиды $S_6 = 4S_{SDC} = 4 \cdot \frac{13}{2} = 26 \text{ (м}^2\text{)}.$

48. Пусть $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$, $AB = BC = 25$ см, $AC = 40$ см. SB — высота пирамиды, $SB = 8$ см.



$$S_{SBA} = \frac{1}{2} SB \cdot AB, S_{SBA} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 8 = 100 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot BC, S_{SBC} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 8 = 100 \text{ (см}^2\text{)}.$$

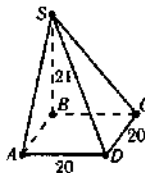
В $\triangle ABC$ проведем медиану BM , она является высотой. BM — проекция наклонной SM на основание

пирамиды. По теореме о трех перпендикулярах $SM \perp AC$. Из $\triangle MBC$, $\angle BMC = 90^\circ$, $MC = \frac{1}{2} AC = 20$ см, найдем BM : $BM = \sqrt{BC^2 - MC^2}$, $BM = \sqrt{625 - 400} = 15$ (см). Из $\triangle SBM$ $\angle SBM = 90^\circ$, найдем SM : $SM = \sqrt{SB^2 + MB^2}$, $SM = \sqrt{64 + 225} = 17$ (см).

$$S_{ASC} = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot AC, S_{ASC} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 17 = 340 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Боковая поверхность пирамиды: $S_6 = S_{ASC} + S_{SBA} + S_{SBC} = 340 + 200 = 540 \text{ (см}^2\text{)}.$

49. $SABCD$ — пирамида, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ со стороной 20 дм. SB — высота пирамиды. $SB = 21$ дм. В $\triangle SAB$ $\angle SBA = 90^\circ$.



$$S_{SAB} = \frac{1}{2} SB \cdot AB, S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 20 = 210 \text{ (дм}^2\text{)}. \triangle SBA = \triangle SBC \text{ по двум катетам. } S_{SCB} = S_{SAB}, SA = SC.$$

$$SA = \sqrt{SB^2 + AB^2}, SA = \sqrt{441 + 400} = 29 \text{ (см)}.$$

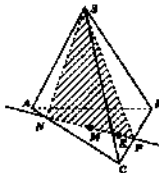
AB и BC — проекции наклонных SA и SC соответственно. $AB \perp AD$ и $BC \perp DC$, так как $ABCD$ — квадрат.

По теореме о трех перпендикулярах $SA \perp AD$ и $SC \perp DC$, то есть SA и SC — высоты $\triangle SAD$ и $\triangle SDC$ соответственно.

$$S_{SAD} = S_{SCD} = \frac{1}{2} SA \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 20 = 290 \text{ (дм}^2\text{)}.$$

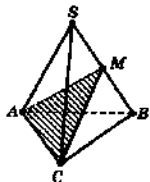
Боковая поверхность пирамиды: $S_6 = 2(S_{SCB} + S_{SAD}) = 2(210 + 290) = 1000 \text{ (дм}^2\text{)} = 10 \text{ (м}^2\text{)}.$

50. Пусть $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$. Точки M и K принадлежат основанию пирамиды. В плоскости основания проведем прямую MK . Она пересечет ребра AC и BC пирамиды в точках N и P . Точки S и N принадлежат и плоскости сечения, и грани SAC , SN — прямая пересечения секущей плоскости и грани SAC . Аналогично SP — прямая пересечения секущей плоскости и грани SBC .

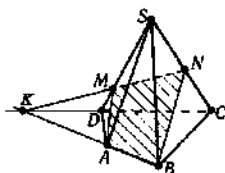


SNP — искомое сечение.

51. Пусть $SABC$ — треугольная пирамида, ABC — основание. Точка M принадлежит ребру SB . Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро AC и точку M . MA и MC — прямые пересечения секущей плоскости и граней SAB и SBC пирамиды. MAC — искомое сечение.

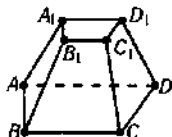


52. $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — основание. Точка N принадлежит ребру SC . Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро AB и точку N . BN — прямая пересечения секущей плоскости и грани SBC . Найдем точку K пересечения прямых AB и CD . Точки



N и K принадлежат одновременно секущей плоскости и плоскости грани SCD . KN — прямая пересечения этих плоскостей. Она пересечет ребро SD в некоторой точке M . Отрезок MN прямой NK является пересечением грани SCD с секущей плоскостью. AM — пересечение грани SAD с секущей плоскостью. $AMNB$ — искомое пересечение.

53. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — усеченная пирамида. Пусть $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $CD = 8$ см, $AD = 9$ см. Основания усеченной пирамиды подобны, откуда:



$$\frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{BC}{B_1 C_1} = \frac{CD}{C_1 D_1} = \frac{AD}{A_1 D_1}, A_1 B_1 = 5 \text{ см.}$$

$$B_1 C_1 = \frac{A_1 B_1 \cdot BC}{AB}, B_1 C_1 = \frac{5 \cdot 7}{6} = \frac{35}{6} \text{ (см).}$$

$$C_1 D_1 = \frac{A_1 B_1 \cdot CD}{AB}, C_1 D_1 = \frac{5 \cdot 8}{6} = \frac{20}{3} \text{ (см).}$$

$$A_1 D_1 = \frac{A_1 B_1 \cdot AD}{AB}, A_1 D_1 = \frac{5 \cdot 9}{6} = \frac{15}{2} \text{ (см).}$$

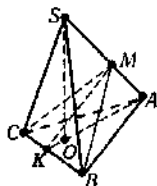
54. Задача решена в учебнике Погорелова.

55. Основания усеченной пирамиды подобны. Площади подобных фигур

относятся как квадраты линейных размеров, то есть $\frac{S_1}{S_2} = \frac{h^2}{x^2}$, где $S_1 = 512 \text{ м}^2$, $S_2 = 50 \text{ м}^2$, h — высота пирамиды, $h = 16 \text{ м}$, x — расстояние от меньшего основания до вершины пирамиды.

Имеем: $\frac{516}{50} = \frac{256}{x^2}$, $x = 5 \text{ м}$, расстояние между основаниями $16 - 5 = 11 \text{ (м)}$.

56. $SABC$ — правильная треугольная пирамида, в основании которой



лежит $\triangle ABC$ со стороной a . SO — высота пирамиды. $SO = h$. В $\triangle SAC$ опустим высоту CM . Из того, что $\triangle SAC = \triangle SAB$ (по определению правильной пирамиды), BM — высота $\triangle SAB$. $SA \perp MC$ и $SA \perp MB$, таким образом, SA — перпендикуляр к плоскости сечения CMB . Точка O — центр $\triangle ABC$, точка пересечения медиан, высот, центр описанной окружности. $OA = OB = OC = R$, где R — радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности. Для правильного треугольника $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Из $\triangle SAO$ $\angle SOA = 90^\circ$, найдем SA :

$$SA = \sqrt{SO^2 + AO^2}, SA = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + 3h^2}.$$

$$\sin \angle SAO = \frac{SO}{AS}, \sin \angle SAO = \frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3h^2}}.$$

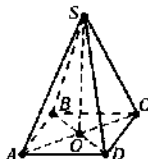
Проведем медиану MK в $\triangle CMB$. AK — медиана $\triangle ABC$, AK проходит через точку O . Таким образом, $\triangle SAO$ и $\triangle AMK$ лежат в одной плоскости. $\angle MAK$ — общий. AK — высота $\triangle ABC$, MK — ее проекция на плоскость MBK .

По теореме о трех перпендикулярах $MK \perp BC$, то есть MK — высота $\triangle MBC$.

$$\text{Из } \triangle AMK \angle AMK = 90^\circ, \\ MK = AK \sin \angle MAK. AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}, MK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3h^2}},$$

$$S_{MBC} = \frac{1}{2} MK \cdot BC, S_{MBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3h^2}} \cdot a = \frac{3a^2 h}{4\sqrt{a^2 + 3h^2}}.$$

57. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ со стороной 8 см. SO — высота пирамиды. $SO = 7$ см.



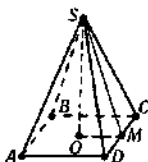
Точка O — точка пересечения диагоналей квадрата. Из $\triangle ABC$

$$\angle BAD = 90^\circ, \text{ найдем } BD: BD = \sqrt{2AB^2}, \\ BD = \sqrt{2 \cdot 64} = 8\sqrt{2} \text{ (см).}$$

$$OB = OD = \frac{BD}{2} = 4\sqrt{2} \text{ см. Из } \triangle SOB, \angle SOB = 90^\circ,$$

$$\text{найдем } SB: SB = \sqrt{OB^2 + SO^2}; SB = \sqrt{32 + 49} = 9 \text{ (см).}$$

58. Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. $\angle DSC = \alpha$.



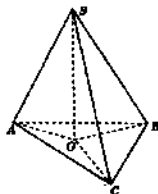
В $\triangle SCD$ проведем медиану SM . Так как по определению правильной пирамиды $SC = SD$, то SM — биссектриса $\angle DSC$ и SM — апофема. OM — проекция наклонной SM на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp CD$. В $\triangle OCM \angle OMC = 90^\circ$, $\angle OCM = 45^\circ$, так как диагональ AC является биссектрисой $\angle BCD$. Таким образом, $\triangle OMC$ — равнобедренный, то есть $OM = MC$. Пусть сторона квад-

рата $ABCD$ равна a . Тогда $OM = MC = \frac{1}{2} DC = \frac{a}{2}$. Из $\triangle SCM$, $\angle SMC = 90^\circ$,

$$\angle MSC = \frac{\alpha}{2}, SM = \frac{CM}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}. \angle SMO — \text{угол между гранью } DSC$$

и плоскостью основания. $\cos \angle SMO = \frac{OM}{SM} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{a} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$

59.



1) Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида. $AC = a$, $SA = b$. SO — высота. Точка O является центром описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности. $AO = OB = OC = R$, где R — радиус описанной окруж-

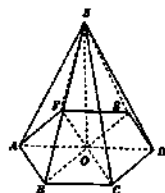
$$\text{ности. Для правильного треугольника } R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\triangle SAO: \angle SOA = 90^\circ, SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}.$$

$$SO = \sqrt{b^2 - \frac{3a^2}{9}} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

2) Воспользуемся рисунком к задаче 57. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. $AB = a$, $SA = b$. SO — высота. Точка O — центр описанной вокруг квадрата $ABCD$ окружности.

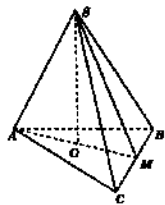
$$AO = BO = CO = DO = R, \text{ для квадрата } R = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ В } \triangle SAO: \angle SOA = 90^\circ, SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}, SO = \sqrt{b^2 - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}.$$



3) $SABCEDEF$ — правильная шестиугольная пирамида, в основании которой лежит шестиугольник со стороной a . Боковое ребро пирамиды равно b . SO — высота. Точка O — центр описанной вокруг шестиугольника $ABCEDEF$ окружности. $AO = BO = CO = DO = EO = FO = R$. Для правильного шестиугольника $R = a$.

$$\text{Из } \triangle SAO, \angle SOA = 90^\circ, SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}, SO = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

60. 1) $SABC$ — правильная пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$ со стороной a .



SO — высота, $SO = b$. Точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, является точкой пересечения медиан, биссектрис и высот.

AM — медиана $\triangle ABC$, она является высотой. $OM \perp BC$, $OM = r$, где r — радиус вписанной окружности. Для правильного треугольника $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

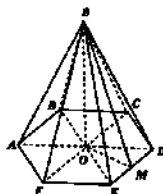
OM — проекция наклонной SM на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $SM \perp BC$, SM — апофема. SM найдем как гипотенузу прямоугольного $\triangle SMO$.

$$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}, SM = \sqrt{b^2 + \frac{a^2 \cdot 3}{36}} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{12}}.$$

2) Воспользуемся рисунком к задаче 58. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ со стороной a . SO — высота. O — центр описанной вокруг квадрата $ABCD$ окружности. В равнобедренном $\triangle SDC$ проведем медиану SM , она является апофемой пирамиды. OM — ее проекция. По теореме

о трех перпендикулярах $OM \perp CD$, $OM = r$. Для квадрата $r = \frac{a}{2}$. Рас-

$$\text{смотрим } \triangle SMO, \angle SOM = 90^\circ SM = \sqrt{OS^2 + OM^2}, SM = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}.$$



3) $SABCDEF$ — правильная пирамида, в основании которой лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной a . SO — высота, $SO = b$. Точка O — центр вписанной вокруг шестиугольника $ABCDEF$ окружности. В $\triangle SED$, $SE = SD$, проведем медиану SM , SM — апофема, OM — ее проекция. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp ED$, $OM = r$.

Для правильного шестиугольника $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\triangle SMO \angle SOM = 90^\circ, SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}, SM = \sqrt{b^2 + \frac{3a^2}{4}}.$$

61. Полная поверхность правильной пирамиды $S_{\text{полн}} = S_6 + S_{\text{осн}}$,

где $S_6 = \frac{1}{2} lP$ (l — апофема, P — периметр основания).

1) Воспользуемся рисунком к задаче 60(1). Для правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h .

$$l = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}, P = 3a, S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, S_{\text{полн}} = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}} \cdot 3a + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \\ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + 12h^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} (a + \sqrt{a^2 + 12h^2}).$$

2) Воспользуемся рисунком к задаче 58. Для правильной четырехугольной пирамиды со стороной a и высотой h $l = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$, $P = 4a$,

$$S_{\text{осн}} = a^2.$$

$$S_{\text{полн}} = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot 4a + a^2 = a\sqrt{a^2 + 4h^2} + a^2 = a(a + \sqrt{a^2 + 4h^2}).$$

3) Воспользуемся рисунком к задаче 60(2). Для правильной шестиугольной пирамиды со стороной a и высотой h $l = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}}$, $P = 6a$,

$$S_{\text{осн}} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} \text{ (см. задачу 14).}$$

$$S_{\text{полн}} = \frac{1}{2} \cdot 6a \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}} + \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2} (a\sqrt{3} + \sqrt{3a^2 + 4h^2}).$$

62. Воспользуемся рисунком к задаче 60(3). $SABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида с боковым ребром a . SO — высота. Точка O — центр вписанной в шестиугольник $ABCDEF$ окружности. В $\triangle SED$, $SE = SD$, проведем медиану SM , SM — апофема. Радиус вписанной в шестиугольник окружности равен r . Для правильного

шестиугольника $r = \frac{b\sqrt{3}}{6}$, где b — сторона шестиугольника. Отсюда

$$b = \frac{2\sqrt{3}}{3} r, \text{ то есть } BD = b = \frac{2\sqrt{3}}{3} r.$$

$$EM = \frac{1}{2} ED = \frac{\sqrt{3}}{3} r. \text{ Из } \triangle SEM: \angle SME = 90^\circ;$$

$$SM = \sqrt{SE^2 - EM^2}, SM = \sqrt{a^2 - \frac{3r^2}{9}} = \sqrt{a^2 - \frac{r^2}{3}}.$$

$$\text{Полная поверхность пирамиды } S_{\text{полн}} = S_6 + S_{\text{осн}}.$$

$$S_6 = \frac{1}{2} lP, \text{ где } l = SM, P = 6 \cdot DE. S_{\text{осн}} = \frac{b^2 3\sqrt{3}}{2} \text{ (из задачи 14).}$$

$$S_{\text{полн}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - \frac{r^2}{3}} \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} r + \frac{12}{9} r^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}r^2 + 2\sqrt{3}r \sqrt{a^2 - \frac{r^2}{3}} = 2r(\sqrt{3}r + \sqrt{3a^2 - r^2}).$$

63. Воспользуемся рисунком к задаче 58.

$SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. $S_6 = 14,76 \text{ м}^2$, $S_{\text{полн}} = 18 \text{ м}^2$,

$$S_{\text{полн}} = S_6 + S_{\text{осн}}, S_{\text{осн}} = S_{\text{полн}} - S_6 = 18 - 14,76 = 3,24 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Так как $S_{\text{осн}} = AB^2$, то $AB = \sqrt{S_{\text{осн}}}$, $AB = 1,8 \text{ м}$. SO — высота пирамиды. Точка O — центр вписанной в квадрат окружности. В $\triangle SDC$ $SD = SC$ проведем медиану SM , SM — апофема, OM — ее проекция. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp DC$. OM — радиус вписанной в квадрат окружности. $OM = \frac{AB}{2} = 0,9$.

Для правильной пирамиды $S_6 = \frac{1}{2} l \cdot P$, где $l = SM$, $P = 4AB$, $S_6 = 2 \cdot AB \cdot SM$,

$$SM = \frac{S_6}{2 \cdot AB}, SM = \frac{14,76}{2 \cdot 1,8} = 4,1 \text{ (м)}. \text{ Из } \triangle SMO, \angle SOM = 90^\circ,$$

найдем SO : $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2}$, $SO = \sqrt{16,81 - 0,81} = 4 \text{ (м)}$.

64. Воспользуемся рисунком к задаче 58. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ со стороной a . ASC — диагональное сечение. $S_{ASC} = S_{ABCD}$, $S_{ABCD} = a^2$, OS — высота, точка O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, центр вписанной окружности.

$$S_{ASC} = \frac{1}{2} SO \cdot AC, AC = a\sqrt{2}, S_{ASC} = a^2; SO = \frac{2S_{ASC}}{2}, SO = \frac{2 \cdot a^2}{a\sqrt{2}} = a\sqrt{2}.$$

SM — апофема, OM — радиус вписанной окружности. $OM = \frac{a}{2}$.

$$\text{Из } \triangle SMO \text{ } SM = \sqrt{OS^2 + OM^2}, SM = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3}{2}a. S_6 = \frac{1}{2} l \cdot P,$$

$$\text{где } l = SM, P = 4a. S_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}a \cdot 4a = 3a^2.$$

65. Для случая треугольной пирамиды $SABC$ (для четырех-, пятиугольной и т.д. пирамид решение будет аналогичным) имеем: SO — высота пирамиды. Опустим перпендикуляры SM, SN и SK на ребра AB, BC и AC . OM, ON и OK — их соответствующие проекции. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AB, ON \perp BC, OK \perp AC$, то есть $\angle SMO, \angle SNO$ и $\angle SKO$ — углы между соответствующими гранями и основанием пирамиды. По условию задачи $\angle SMO = \angle SNO = \angle SKO = \varphi$. $S_{ABC} = Q$. $S_{ABC} = S_{AOC} + S_{AOB} + S_{COB}$. Треугольники AOC, AOB и BOC являются ортогональными проекциями граней SAC, SAB и SBC .

Поэтому $S_{AOC} = S_{ASC} \cdot \cos \varphi$, $S_{AOB} = S_{ASB} \cdot \cos \varphi$, $S_{BOC} = S_{BSC} \cdot \cos \varphi$. Отсюда $S_{ABC} = \frac{S_{AOB}}{\cos \varphi}$, $S_{ASB} = \frac{S_{AOB}}{\cos \varphi}$, $S_{BSC} = \frac{S_{BOC}}{\cos \varphi}$. $S_6 = S_{ABC} + S_{ASB} + S_{BSC} =$
 $= \frac{1}{\cos \varphi} (S_{AOC} + S_{AOB} + S_{BOC}) = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot S_{ABC} = \frac{Q}{\cos \varphi}$.

66. Решение этой задачи аналогично решению предыдущей. Но поскольку $S_6 = S$, то $\cos \varphi = \frac{Q}{S}$ (равенство двугранных углов при основании следует из правильности пирамиды).
67. Воспользуемся рисунком к задаче 60(1). $SABC$ — правильная треугольная пирамида. $S_6 = 144 \text{ см}^2$, $SA = 10 \text{ см}$. В $\triangle SBC$, $SC = SB$, проведем медиану SM , SM — апофема.

$S_6 = \frac{1}{2} l \cdot P$, где $P = 3a$ (a — сторона $\triangle ABC$), $l = SM$. $\triangle SMC$ — прямоугольный,

$SC^2 = SM^2 + CM^2$. $CM = \frac{a}{2}$, откуда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{3a}{2} l = 144, \\ l^2 + \frac{a^2}{4} = 100; \end{cases} \begin{cases} l = \frac{96}{a}, \\ \frac{(96)^2}{a^2} + \frac{a^2}{4} = 100; \end{cases} \frac{9216}{a^2} + \frac{a^2}{4} = 100, \frac{36864 + a^4}{4a^2} = 100,$$

$a^4 - 400a^2 + 36864 = 0$. Отсюда $a_1 = 12 \text{ см}$, $a_2 = 16 \text{ см}$. Таким образом, $l_1 = 8 \text{ см}$, $l_2 = 6 \text{ см}$.

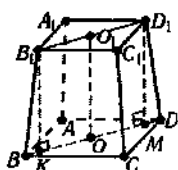
68. Воспользуемся рисунком к задаче 58. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. $SA = 5 \text{ см}$, $S_{\text{полн}} = 16 \text{ см}^2$. Пусть сторона основания равна a . В $\triangle SDC$ проведем медиану SM , SM — апофема. $DM = MC = \frac{a}{2}$. Из $\triangle SMD$: $\angle SMD = 90^\circ$, $SM = \sqrt{SD^2 - MD^2}$, $SM = \sqrt{25 - \frac{a^2}{4}}$. $S_{\text{полн}} =$
 $= S_6 + S_{\text{осн}}$, $S_{\text{осн}} = a^2$, $S_6 = \frac{1}{2} l \cdot P$, где $l = SM$, $P = 4a$. $S_{\text{полн}} = \frac{1}{2} \sqrt{25 - \frac{a^2}{4}} \cdot 4a + a^2 = 16$;
 $\sqrt{100 - a^2} \cdot a = 16 - a^2$, $(100 - a^2)a^2 = 256 - 32a^2 + a^4$,

$$100a^2 - a^4 = 256 - 32a^2 + a^4, 2a^4 - 132a^2 + 256 = 0, a^4 - 66a^2 + 128 = 0.$$

Отсюда $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 8$, но если $a = 8$ см, то $S_{\text{полн}} > 16$ см². Поэтому $a = \sqrt{2}$ см.

69. Задача решена в учебнике Погорелова.

70. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида.



$AB = 10$ см, $A_1 B_1 = 2$ см. OO_1 — высота, $OO_1 = 7$ см.

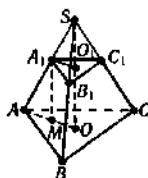
Диагональ BD нижнего основания найдем из $\triangle ABD$,

$$\angle BAD = 90^\circ, BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}, BD = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

$$B_1 D_1 = 2\sqrt{2} \text{ см. } BO = OD = 5\sqrt{2} \text{ см, } B_1 O_1 = O_1 D_1 = \sqrt{2} \text{ см.}$$

Диагональное сечение $BB_1 D_1 D$ — трапеция, OO_1 — ее высота. $D_1 M$ — высота трапеции. $D_1 M = OO_1 = 7$ см, $D_1 M \parallel OO_1$, $OO_1 D_1 M$ — прямоугольник (так как $OO_1 \perp BD$), $O_1 D_1 = OM = \sqrt{2}$ см, $MD = OD - OM = 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (см). Из $\triangle D_1 MD$: $\angle PD_1 MD = 90^\circ$; $D_1 D = \sqrt{D_1 M^2 + MD^2}$, $D_1 D = \sqrt{49 + 32} = 9$ (см).

71. Пусть $ABCA_1 B_1 C_1$ — правильная треугольная усеченная пирамида.



OO_1 — высота. Сторона большего основания 4 дм, сторона меньшего основания — 1 дм, боковое ребро — 2 дм. Точка O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности, $OA = OB = OC = R$, где $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ дм. Точка O_1 — центр описанной вокруг $\triangle A_1 B_1 C_1$ окружности,

$$O_1 A_1 = O_1 B_1 = O_1 C_1 = R, \text{ где } R = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ дм.}$$

$\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$, $\angle B_1 A_1 C_1 = \angle BAC$, $A_1 B_1 \parallel AB$, $A_1 C_1 \parallel AC$, $A_1 O_1$ и AO — биссектрисы углов $B_1 A_1 C_1$ и BAC соответственно.

$A_1 O_1 \parallel AO$, таким образом, $AA_1 O_1 O$ — трапеция, OO_1 — высота. Из точки A_1 опустим высоту трапеции $A_1 M$. $A_1 O_1 OM$ — прямоугольник, $MO = A_1 O_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ дм, $AM = AO - MO = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ (дм). Из

$\triangle AA_1 M$, $\angle A_1 MA = 90^\circ$, найдем $A_1 M$:

$$A_1 M = \sqrt{AA_1^2 - AM^2}, A_1 M = \sqrt{4 - 3} = 1 \text{ (дм)}. OO_1 = A_1 M = 1 \text{ дм.}$$

72. Воспользуемся рисунком к задаче 70. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида.

OO_1 — высота, $OO_1 = 2$ см, $AB = 5$ см, $A_1 B_1 = 3$ см. Диагональ нижнего основания $BD = 5\sqrt{2}$ см, диагональ верхнего основания $B_1 D_1 = 3\sqrt{2}$ см. $BB_1 D_1 D$ — трапеция, BD_1 — ее диагональ, а BD_1 — диа-

гональ пирамиды. OO_1 — высота трапеции. D_1M — высота трапеции.

$D_1M = O_1O$. OO_1D_1M — прямоугольник. $OM = O_1D_1 = \frac{1}{2}B_1D_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ см.

$$BO = OD = \frac{1}{2}BD = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ см. } BM = BO + OM = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ (см).}$$

Из $\triangle BD_1M$, $\angle BMD_1 = 90^\circ$ найдем BD_1 : $BD_1 = \sqrt{BM^2 + D_1M^2}$,

$$BD_1 = \sqrt{32 + 4} = 6 \text{ (см).}$$

73. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная треугольная пирамида.

$AB = 6$ см, $A_1B_1 = 2$ см. OO_1 — высота. Точки O и O_1 являются соответственно центрами правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, точками пересечения их медиан, высот и биссектрис, центры вписанных в треугольники окружностей. $OL = OK = OM = r$, где r — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности. $r = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ (см). $O_1L_1 = O_1M_1 = O_1K_1 = r_1$, где

$$r_1 \text{ — радиус вписанной в } \triangle A_1B_1C_1 \text{ окружности. } r_1 = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (см).}$$

AA_1K_1K — трапеция. OO_1 — высота. Опустим высоту K_1P , $K_1P \parallel OO_1$, $K_1P \perp OO_1$, OO_1K_1P — прямоугольник.

$$OP = O_1K_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ см. } PK = OK - OP = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (см).}$$

PK — проекция наклонной K_1K на плоскость ABC . Поскольку $OK \perp BC$, то по теореме о трех перпендикулярах $K_1K \perp BC$. $\angle K_1KP$ — угол между боковой гранью и большим основанием. По условию $\angle K_1KP = 60^\circ$.

Из $\triangle PK_1K$, $\angle K_1PK = 90^\circ$, $K_1P = PK \operatorname{tg} \angle K_1KP$:

$$K_1P = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 2 \text{ (см). } OO_1 = K_1P = 2 \text{ см.}$$

74. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная треугольная пирамида. OO_1 — вы-

сота. $AB = a$, $A_1B_1 = b$. Точки O и O_1 являются центрами правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, точки пересечения их медиан, биссектрис, высот, центры описанных вокруг этих треугольников окружностей. $AO = BO = CO = R$, где R — радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности, $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$A_1O_1 = B_1O_1 = C_1O_1 = R_1, \text{ где } R_1 = \frac{b\sqrt{3}}{3}.$$

CM и C_1M_1 — медианы $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ соответственно, они являются и высотами. $CM \parallel C_1M_1$. MM_1C_1C — сечение, проходящее через боковое ребро C_1C и высоту пирамиды MM_1 , C_1C — трапеция.

Ее основания $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $C_1M_1 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. В трапеции опустим высоту C_1N , $C_1N \perp CN$.

CN — проекция бокового ребра C_1C на плоскость большего основания. $\angle C_1CN$ — угол между ребром CC_1 и плоскостью основания. По условию $\angle C_1CN = 45^\circ$. В $\triangle NC_1C$ $\angle C_1NC = 90^\circ$, равнобедренный. $NC = C_1N$.

OO_1C_1N — прямоугольник. $ON = O_1C_1$, $NC = OC - ON = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{b\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(a - b)$.

$C_1N = NC = \frac{\sqrt{3}}{3}(a - b)$. Площадь трапеции MM_1C_1C

$$S = \frac{1}{2}(MC + M_1C_1) \cdot C_1N;$$

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{3}(a - b) = \frac{a^2 - b^2}{4}.$$

75. Воспользуемся рисунком к задаче 70. $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида. $AB = 8$ см, $A_1B_1 = 2$ см. OO_1 — высота, $OO_1 = 4$ см.

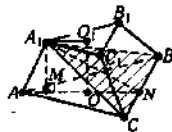
BB_1D_1D — диагональное сечение. BB_1D_1D — трапеция, OO_1 — ее высота, BD и B_1D_1 — основания. BD и B_1D_1 — диагонали квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно.

$$BD = 8\sqrt{2} \text{ см}, B_1D_1 = 2\sqrt{2} \text{ см}.$$

$$\text{Площадь трапеции } S = \frac{1}{2}(BD + B_1D_1) \cdot OO_1.$$

$$S = \frac{1}{2}(8\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \cdot 4 = 20\sqrt{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

76. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная усеченная пирамида. $AB = 8$ м, $A_1B_1 = 5$ м. OO_1 — высота. $OO_1 = 3$ м. Точки O и O_1 являются центрами описанных вокруг треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ окружностей. OA и O_1A_1 — их радиусы. $OA = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ м, $O_1A_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ м.



AN и A_1N_1 — медианы и высоты $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ соответственно. $AN \parallel A_1N_1$.

AA_1N_1N — трапеция. OO_1 — ее высота. Проведем высоту A_1M трапеции:

$$A_1M \perp AN, A_1O_1OM \text{ — прямоугольник. } MO = A_1O_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$$AM = AO - MO = \frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \text{ (м)}.$$

$$AN = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (м)}. MN = AN - AM = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ (м)}.$$

MN — проекция наклонной A_1N на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $A_1N \perp BC$.

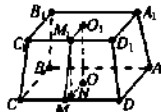
A_1BC — сечение, проведенное через ребро BC и вершину A_1 . A_1N — высота $\triangle CA_1B$. $S_{CA_1B} = \frac{1}{2} A_1N \cdot BC$. A_1N найдем из $\triangle A_1NM$, $\angle A_1MN = 90^\circ$:

$$A_1N = \sqrt{A_1M^2 + MN^2} = \sqrt{9 + 27} = 6 \text{ (м)}. S_{CA_1B} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ (м}^2\text{)}.$$

$\angle A_1NM$ — угол между секущей плоскостью и плоскостью основания.

$$\sin \angle A_1NM = \frac{A_1M}{A_1N}, \sin \angle A_1NM = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \angle A_1NM = 30^\circ.$$

77. Пусть $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида. $AB = 8$ м, $A_1B_1 = 2$ м, OO_1 — высота, $OO_1 = 4$ м.



Точки O и O_1 являются центрами квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, точками пересечения их диагоналей и центрами вписанных окружностей. $OM \perp CD$, $O_1M_1 \perp C_1D_1$. OM и O_1M_1 — радиусы окружностей, вписанных в квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно.

$$OM = \frac{1}{2} AB = 4 \text{ м}, O_1M_1 = \frac{1}{2} A_1B_1 = 1 \text{ м}. O_1M_1 \parallel OM,$$

OO_1M_1M — трапеция, OO_1 — ее высота. M_1N — высота трапеции, $OO_1 = M_1N$. OO_1M_1N — прямоугольник.

$$ON = O_1M_1 = 1 \text{ м}, NM = OM - ON = 4 - 1 = 3 \text{ (см)}.$$

NM — проекция наклонной M_1M на основание пирамиды. По теореме о трех перпендикулярах $M_1M \perp DC$. M_1M — апофема. Полная поверхность пирамиды:

$$S_{\Sigma} = S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2} + S_{\text{б}}, \text{ где } S_{\text{осн}_1} = 64 \text{ м}^2, S_{\text{осн}_2} = 4 \text{ м}^2, S_{\text{б}} = \\ = \frac{1}{2} (P + P_1) \cdot l,$$

$$\text{где } P = 4AB = 32 \text{ м}, P_1 = 4 \cdot A_1B_1 = 8 \text{ м}, l = M_1M.$$

$$MM_1 = \sqrt{NM^2 + M_1N^2}, MM_1 = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ (м)}.$$

$$S_{\Sigma} = 64 + 4 + \frac{1}{2} (32 + 8) = 168 \text{ (м}^2\text{)}.$$

78. 1) $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная усеченная пирамида. $AB = a$, $A_1B_1 = b$.

OO_1 — высота, $OO_1 = h$. Точки O и O_1 являются точками пересечения медиан и высот $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ соответственно, они также являются центрами вписанных в эти треугольники окружностей. AM и A_1M_1 — медианы и высоты $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ соответственно.

OM и O_1M_1 — радиусы вписанных в эти треугольники окружностей.

$OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $O_1M_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$. Из точки M_1 опустим высоту M_1N ;

$M_1N \parallel OO_1$, $M_1N = OO_1$.

OO_1M_1N — прямоугольник. $ON = O_1M_1$.

$$NM = OM - ON = \frac{\sqrt{3}}{6}(a - b).$$

NM — проекция наклонной M_1M на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $M_1M \perp BC$. M_1M — апофема.

$\triangle M_1MN$: $\angle M_1NM = 90^\circ$;

$$M_1M = \sqrt{NM^2 + M_1N^2},$$

$$M_1M = \sqrt{\frac{3}{36}(a - b)^2 + h^2} = \sqrt{(a - b)^2 + 12h^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Площадь поверхности пирамиды:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2} + S_6, \text{ где } S_{\text{осн}_1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, S_{\text{осн}_2} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4},$$

$$S_6 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot M_1M.$$

$$P_1 = 3a, P_2 = 3b.$$

$$S_{\text{полн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}(3a + 3b) \cdot \sqrt{(a - b)^2 + 12h^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(a^2 + b^2 + (a + b)\sqrt{(a - b)^2 + 12h^2} \right).$$

2) Воспользуемся рисунком к задаче 77.

Решение задачи аналогично предыдущему.

Для квадрата радиус вписанной окружности равен половине стороны.

Поэтому $OM = \frac{a}{2}$, $O_1M_1 = \frac{b}{2}$, $ON = O_1M_1 = \frac{b}{2}$; $MN = OM - ON =$

$$= \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(a - b). \triangle M_1MN: \angle M_1NM = 90^\circ; M_1M = \sqrt{NM^2 + M_1N^2};$$

$$M_1M = \sqrt{\frac{1}{4}(a - b)^2 + h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a - b)^2 + 4h^2}. M_1M \text{ — апофема.}$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2} + S_6, S_{\text{осн}_1} = a^2, S_{\text{осн}_2} = b^2, S_6 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)M_1M, P_1 =$$

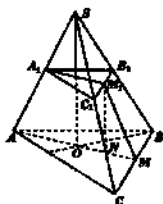
$$= 4a, P_2 = 4b.$$

$$S_{\text{полн}} = a^2 + b^2 + \frac{1}{2}(4a + 4b) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(a - b)^2 + 4h^2} =$$

$$a^2 + b^2 + (a + b)\sqrt{(a - b)^2 + 4h^2}.$$

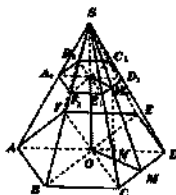
3) Решение задачи аналогично двум предыдущим. Для правильного шестиугольника $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $O_1M_1 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, $ON = O_1M_1 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$,

$$NM = OM - ON = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b).$$



$$NM = OM - ON = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b). M_1M - \text{апофема. } MM_1 = \sqrt{NM^2 + M_1N^2};$$

$$MM_1 = \sqrt{\frac{3}{4}(a - b)^2 + h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3(a - b)^2 + 4h^2}.$$



$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2} + S_{\delta}.$$

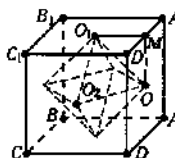
$$S_{\text{осн}_1} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}, S_{\text{осн}_2} = \frac{b^2 3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{см. задачу 14}).$$

$$S_{\delta} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)M_1M, P_1 = 6a, P_2 = 6b.$$

$$S_{\text{полн}} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} + \frac{b^2 3\sqrt{3}}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}(6a + 6b) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3(a - b)^2 + 4h^2} = \frac{3}{2}(\sqrt{3}(a^2 + b^2) + (a + b)\sqrt{3(a - b)^2 + 4h^2}).$$

79. Имеем: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. O, O_1 и O_2 — центры граней $AA_1 D_1 D$, $A_1 B_1 C_1 D_1$ и $DD_1 C_1 C$, точки пересечения их диагоналей.



$\triangle A_1 O D_1$ и $\triangle A_1 O_1 D_1$ — равные равнобедренные треугольники. M — середина $A_1 D_1$. $O_1 M$ и OM — медианы и высоты треугольников.

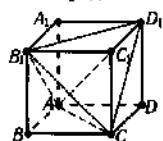
$OM = MO_1$, $\triangle OMO_1$ — прямоугольный, $\angle OMO_1 = 90^\circ$.

$OO_1 = \sqrt{OM^2 + O_1 M^2}$. Аналогично $OO_2 = \sqrt{OK^2 + O_2 K^2}$, где K — середина $D_1 D$. $OM = OK = MO_1 = KO_2$.

$OO_1 = OO_2$. Аналогично $O_1 O_2 = OO_2 = OO_1$.

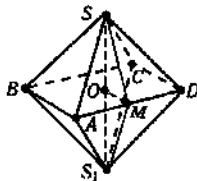
$OO_1 O_2$ — правильный треугольник. Если таким же образом соединить середины всех граней куба, то получим октаэдр.

80. Имеем: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Его грани — равные квадраты, у них равные диагонали. Таким образом, $AC = B_1 D_1 = AB_1 = AD_1 = CD_1 = B_1 C$. $D_1 A B_1 C$ — тетраэдр.



81. Задача решена в учебнике Погорелова.

82*. $SABCD S_1$ — октаэдр. Из вершины S октаэдра опустим высоту SO на плоскость $ABCD$. OA, OB, OC и OD — проекции ребер SA, SB, SC и SD на плоскость $ABCD$. Поскольку $SA = SB = SC = SD$, то $OA = OB = OC = OD$, точка O — центр описанной вокруг четырехугольника $ABCD$ окружности. Поскольку $AB = BC = CD = AD$, то $ABCD$ — квадрат, точка O — точка пересечения его диагоналей. Рассмотрим трехгранный угол, образованный плоскостями граней SAD, SCD и ADC . Плоские углы

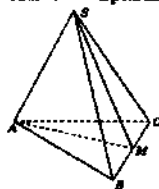


$SDA = SDC = 60^\circ$, $ADC = 90^\circ$. В $\triangle SAD$ SM — медиана и высота, OM — ее проекция, по теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AD$, $\angle SMO$ — двугранный угол между плоскостью SAD и $ABCD$.

$$\cos \angle SMO = \frac{\operatorname{tg} \frac{\angle ADC}{2}}{\operatorname{tg} \angle SDC} \quad (\text{см. задачу 4}). \quad \cos \angle SMO = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ} = 0,5774,$$

$\angle SMO = 54^\circ 44'$. $\angle PS_1MO$ — двугранный угол между гранью S_1AO и плоскостью $ABCD$, $\angle S_1MO = \angle SMO$, $\angle SMS_1$ — двугранный угол при ребре AD октаэдра, $\angle SMS_1 = 2 \cdot \angle SMO$, $\angle SMS_1 = 109^\circ 28'$.

83. $SABC$ — правильный тетраэдр. AM и SM — медианы, высоты и биссектрисы $\triangle ABC$ и $\triangle SBC$. AM — геометрическое место точек, равноудаленных от ребер AB и AC , SM — геометрическое место точек, равноудаленных от ребер SB и SC . Плоскость SMA является плоскостью симметрии тетраэдра. Таким образом, плоскостями симметрии правильного тетраэдра являются плоскости, проходящие через его ребро и медиану противоположной грани.

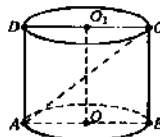


- 84*. Воспользуемся рисунком к задаче 82. Плоскостями симметрии октаэдра являются плоскости $SBDS_1$, $ABCD$ и SAS_1C , а также плоскости, которые проходят через противоположные вершины октаэдра и середины двух параллельных ребер (например плоскость SMS_1). У октаэдра три пары противоположных вершин, через каждую пару можно провести две плоскости симметрии. Таким образом, всего $3 + 3 \cdot 2 = 9$ плоскостей симметрии.

В додекаэдре плоскости симметрии проходят через пары противоположных параллельных ребер. Всего в додекаэдре 30 ребер, то есть 15 пар, через каждую пару можно провести одну плоскость симметрии, всего таких плоскостей 15. В икосаэдре плоскостями симметрии также являются плоскости, проведенные через пару параллельных ребер. Их 15.

§ 6. Тела вращения

1. Пусть дан цилиндр, OO_1 — его ось, $OO_1 = 3$ м, O_1D — радиус основания, $O_1D = 2$ м. $ABCD$ — осевое сечение. AD и BC — образующие.

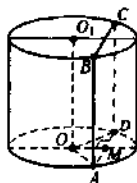


$AD = OO_1 = 3$ м, DC — диаметр основания, $DC = 2 \cdot O_1D$, $DC = 2 \cdot 2 = 4$ (м).

AC — диагональ осевого сечения. Из $\triangle ACD$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}$, $AC = \sqrt{9 + 16} = 5$ (м).

2. Задача решена в учебнике Погорелова.

3. Пусть дан цилиндр, OO_1 — его ось, высота цилиндра $AB = 6$ см, $OA = 5$ см. В плоскости нижнего основания проведем хорду AD и параллельную ей хорду BC в плоскости верхнего основания, $ABCD$ — сечение.



$\triangle AOD$ — равнобедренный, так как $OA = OD = r$,
 OM — медиана и высота. $OM = 4$ см.

Рассмотрим $\triangle AMO$: $\angle AMO = 90^\circ$; $AM = \sqrt{OA^2 - OM^2}$;

$AM = \sqrt{25 - 16} = 3$ (см). $AD = 6$ см.

$S_{ABCD} = AB \cdot AD$, $S_{ABCD} = 6 \cdot 6 = 36$ (см²).

4. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче.

Высота цилиндра $AB = 8$ дм, $ABCD$ — квадрат ($AB = BC = CD = AD = 8$ дм). Радиус основания $OA = 5$ дм. В $\triangle AOD$ $AO = OD = 5$ дм, OM — медиана и высота;

$AM = MD = 4$ дм. Из $\triangle AOM$ ($\angle AOM = 90^\circ$) имеем:

$OM = \sqrt{AO^2 - AM^2}$, $OM = \sqrt{25 - 16} = 3$ (дм).

5. В цилиндре с осью OO_1 $AD = 6$ дм, $AB = 10$ дм, $OC = 5$ дм проведем плоскость через прямые AC и AB . Она пересечет плоскость нижнего основания по хорде BC .

$\triangle COB$ — равнобедренный. OM — медиана и высота.

OO_1 параллельна плоскости ABC . OM — расстояние от OO_1 до плоскости ABC , OM — расстояние от OO_1 до AB .

Из $\triangle ABC$ $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$,

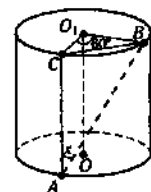
$BC = \sqrt{100 - 36} = 8$ (дм). $CM = MB = 4$ дм. Из $\triangle COM$

имеем: $\angle CMO = 90^\circ$, $OM = \sqrt{OC^2 - CM^2}$, $OM = \sqrt{25 - 16} = 3$ (дм).

6. В цилиндре с осью OO_1 $O_1B = \frac{1}{2} AB$. $\angle BO_1C = 60^\circ$.

В $\triangle BO_1C$ $O_1B = O_1C$, таким образом, $\angle O_1BC = \angle O_1CB = 60^\circ$,

$BC = O_1B = \frac{1}{2} AB$. Пусть $\angle BAC = \alpha$. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$.



7. Задача решена в учебнике Погорелова.

8. В цилиндр с осью OO_1 вписан квадрат $ABCD$. Высота цилиндра $CK = 2$ м. DK — проекция наклонной CD на плоскость нижнего основания. Так как $CD \perp AD$, то по теореме о трех перпендикулярах $DK \perp AD$.

$\triangle AOD$ — равнобедренный, $AO = OD = 7$ м.

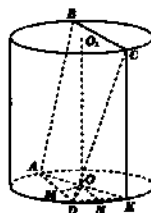
OM — медиана и высота.

ON — медиана и высота равнобедренного $\triangle DOK$.

$MOND$ — прямоугольник.

Если $OM = y$, то $DK = 2y$, $MD = x$, тогда $AD = CD = 2x$.

Из $\triangle MOD$, $\angle OMD = 90^\circ$, имеем $OD^2 = OM^2 + MD^2$,



$$49 = y^2 + x^2. \text{ Из } \triangle CDK, \angle CKD = 90^\circ, CK^2 = CD^2 - DK^2, \\ 4 = 4x^2 - 4y^2, x^2 - y^2 = 1.$$

$$2x^2 = 50; x^2 = 25, x = 5. AD = 2x = 2 \cdot 5 = 10 \text{ (м).}$$

9. Высота конуса $SO = 4$ м, радиус основания $OM = 3$ м.

SM — образующая. Из $\triangle SMO$,

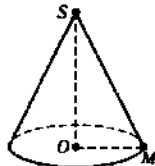
$$\angle SOM = 90^\circ, SM = \sqrt{SO^2 + OM^2},$$

$$SM = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ (м).}$$

10. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче.

SO — высота конуса. Образующая конуса $SM = l$. OM — проекция образующей SM на основание конуса. $\angle SMO = 30^\circ$.

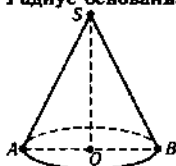
$$SO = SM \sin 30^\circ, SO = \frac{l}{2}.$$



11. Радиус основания конуса $OB = R$. SO — ось конуса. ASB — осевое сечение. $\angle ASB = 90^\circ$, $SA = SB$, таким образом, $\triangle ASB$ равнобедренный, $\angle SAB = \angle SBA = 45^\circ$.

$$SO = OB \operatorname{tg} 45^\circ, SO = R, S_{ASB} = \frac{1}{2} AB \cdot SO, AB = 2R.$$

$$S_{ASB} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = R^2.$$

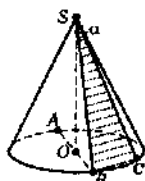


12. Пусть SAB — осевое сечение, $SA = AB = SB$.

$OB = R$, SO — высота и медиана $\triangle SAB$, $SB = AB = 2R$.

В $\triangle SBC$ ($\angle BSC = \alpha$), $SC = SB = 2R$.

$$S_{SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot SC \cdot \sin \alpha. S_{SBC} = \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \sin \alpha = 2R^2 \sin \alpha.$$

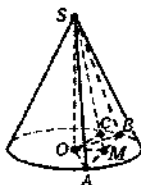


13. Высота конуса $SO = 20$, радиус основания $OA = 25$. SAB — сечение. $\triangle AOB$ равнобедренный, так как $AO = OB$, OM — медиана и высота. SM — медиана и высота $\triangle SAB$. $AB \perp OM$, $AB \perp SM$.

AB — перпендикуляр к плоскости SOM . Так как плоскость сечения SAB проходит через AB , то плоскости SOM и SAB перпендикулярны. SM — прямая пересечения. Из точки O опустим перпендикуляр OC на прямую сечения SM , OC — расстояние от точки O до плоскости сечения. $OC = 12$.

Обозначим $\angle OSM$ через α . Из $\triangle SOC$, $\angle SCO = 90^\circ$, $\sin \alpha = \frac{OC}{SO}$,
 $\sin \alpha = \frac{12}{20} = 0,6;$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \cos \alpha = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8. \text{ Из } \triangle OSM,$$



$$\angle SOM = 90^\circ, SM = \frac{OS}{\cos \alpha},$$

$$SM = \frac{20}{0,8} = 25, OM = \sqrt{SM^2 - SO^2}, OM = \sqrt{625 - 400} = 15.$$

$$\text{Из } \triangle OAM, \angle OMA = 90^\circ, AM = \sqrt{OA^2 - OM^2}, AM = \sqrt{625 - 225} = 20.$$

$$AB = 2 \cdot AM, AB = 40. S_{ASB} = \frac{1}{2} SM \cdot AB, S_{ASB} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 25 = 500.$$

14. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. Радиус основания $OA = R$. SO — высота конуса, SA — образующая. AO — ее проекция на плоскость основания, $\angle SAO = \alpha$.

Из $\triangle SAO$ ($\angle SOA = 90^\circ$) $SO = AO \operatorname{tg} \alpha$, $SO = R \operatorname{tg} \alpha$. SAB — сечение. SM — медиана и высота равнобедренного $\triangle SAB$. OM — ее проекция на плоскость основания.

$AB \perp OM$, $AB \perp SM$, AB — перпендикуляр к плоскости SOM . Плоскости SOM и SAB перпендикулярны, SM — прямая их пересечения. В плоскости SOM опустим перпендикуляр OC на прямую SM , OC — перпендикуляр к плоскости SAB .

SC — проекция наклонной SO на плоскость SAB . $\angle OSC = \varphi$. Из $\triangle SMO$ ($\angle SOM = 90^\circ$) $SM = \frac{SO}{\cos \varphi}$, $SM = \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi}$, $OM = SO \operatorname{tg} \varphi$, $OM = R \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi$. Из $\triangle AOM$ ($\angle AMO = 90^\circ$) $AM = \sqrt{AO^2 - OM^2}$, $AM = \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi} = R \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi}$.

$$AB = 2AM, AB = 2R \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

$$S_{ASB} = \frac{1}{2} AB \cdot SM, S_{ASB} = \frac{1}{2} \cdot 2R \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi} = \frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

15. Задача решена в учебнике Погорелова.

16. Высота конуса H , площадь основания S , тогда площадь сечения $\frac{S}{2}$.

Если обозначим через x расстояние от вершины до плоскости сечения,

$$\text{то } \frac{x^2}{H^2} = \frac{S}{2S}, x^2 = \frac{H^2}{2}, x = \frac{H}{\sqrt{2}}.$$

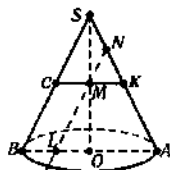
17. Образующая конуса $SB = l$, SO — высота конуса, M — ее середина, SAB — осевое сечение. В плоскости сечения через точку M проведем прямую параллельную SB . Она пересечет основание конуса в некоторой точке L , а образующую SA — в точке N . Рассмотрим $\triangle SOB$ и $\triangle MOL$.

$\angle SOB$ общий, поскольку $ML \parallel SB$, то $\angle SBO = \angle MLO$,

$$\triangle SOB \sim \triangle MOL, \frac{ML}{SB} = \frac{OM}{SO}, \text{ но } MO = \frac{1}{2} SO, \text{ поэтому } ML = \frac{1}{2} SB,$$

$ML = \frac{1}{2}l$. $\angle SMN = \angle OML = \angle OSB = \angle ASO$, таким образом, $\triangle SNM$

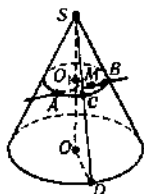
равнобедренный, $SN = NM$. Через точку M проведем прямую KC , параллельную AB . $\angle CBO = \angle MLO = \angle CML =$
 $= \angle NMK = \angle NKM$. Таким образом, $NM = NK = NS$,



$$NM = \frac{1}{2}KS, \triangle KSM \sim \triangle ASO, \frac{SM}{MO} = \frac{SK}{KA} = 1,$$

$$SK = KA = \frac{l}{2}. NM = \frac{l}{4}. NL = \frac{l}{2} + \frac{l}{4} = \frac{3l}{4}.$$

18*. Прямая α , параллельная основанию конуса, пересекает его в точках A и B . Через эти точки проведем сечение конуса, параллельное основанию.



Расстояние OO_1 от плоскости сечения до плоскости основания равно 6 см. Высота конуса $SO = 12$ см. Образующая $SD = 13$ см. В $\triangle AO_1B$ $AO_1 = BO_1$, тогда он равнобедренный. O_1M — его медиана и высота, $O_1M = 2$ см. $SO_1 = SO - O_1O$, $SO_1 = 12 - 6 = 6$ (см).

Из $\triangle SO_1M$ ($\angle SO_1M = 90^\circ$) по теореме Пифагора найдем SM :

$$SM = \sqrt{SO_1^2 + O_1M^2}, SM = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10} \text{ (см)}.$$

O_1M — проекция наклонной SM на плоскость сечения.

По теореме о трех перпендикулярах $SM \perp AB$. $\triangle SO_1C \sim \triangle SOD$, так как $\angle SO_1C = \angle SOD = 90^\circ$, $\angle OSD$ общий.

$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{SC}{SD}, SC = \frac{SO_1 \cdot SD}{SO}, SC = \frac{6 \cdot 13}{12} = 6,5 \text{ (см)}.$$

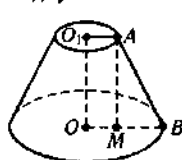
Так как сечение, параллельное основанию, пересекает конус, то $SA = SB = SC = 6,5$ см. В $\triangle SAB$ SM — медиана и высота.

Из $\triangle SMA$ ($\angle SMA = 90^\circ$) по теореме Пифагора имеем: $AM =$

$$\sqrt{SA^2 - SM^2},$$

$$AM = \sqrt{42,25 - 40} = 1,5 \text{ (см)}. AB = 2AM, AB = 3 \text{ см}.$$

19. Радиусы оснований усеченного конуса с осью OO_1 $O_1A = 3$ м, $OB = 6$ м.



Пусть $O_1A \parallel OB$, OO_1AB — трапеция, OO_1 — ее высота, а OO_1 — высота конуса, $OO_1 = 4$ м. AB — образующая. Опустим высоту AM трапеции, $AM = OO_1$, $AM \parallel OO_1$, $OM = O_1A = 3$ м, $MB = OB - OM$, $MB = 6 - 3 = 3$ (м). Из $\triangle ABM$, $\angle AMB = 90^\circ$, $AB =$
 $= \sqrt{AM^2 + MB^2}, AB = \sqrt{16 + 9} = 5$ (м).

20. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. $OB = R$, $O_1A = r$, $MB = R - r$. MB — проекция образующей AB на плоскость большего основания, $\angle ABM = 45^\circ$. $\triangle AMB$ — равнобедренный, $AM = MB = R - r$. Высота конуса $OO_1 = AM = R - r$.

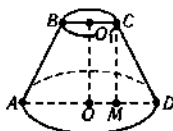
21. Воспользуемся рисунком к задаче 19. Образующая конуса $AB = 2a$, $\angle ABM = 60^\circ$.

$$\text{Из } \triangle ABM: \angle AMB = 90^\circ; MB = AB \cos 60^\circ, MB = 2a \cdot \frac{1}{2} = a.$$

$$\text{По условию } O_1A = \frac{1}{2}OB, OM = O_1A = \frac{1}{2}OB,$$

$$OM = MB = a, OB = 2a, O_1A = a.$$

22. Пусть дан усеченный конус с осью OO_1 . Радиусы его оснований $O_1C = 3$ дм, $OD = 7$ дм, $ABCD$ — осевое сечение, CD — образующая конуса, $CD = 5$ дм. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, OO_1 — ее высота. Опустим высоту CM трапеции.



$$CM = OO_1, CM \parallel OO_1, OM = O_1C = 3 \text{ дм}, MD = OD - OM, MD = 7 - 3 = 4 \text{ (дм)}.$$

$$\text{Из } \triangle CMD: \angle CMD = 90^\circ; CM = \sqrt{CD^2 - MD^2},$$

$$CM = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ (дм)}.$$

Площадь трапеции $ABCD$:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CM, AD = 2OD = 14 \text{ дм}, BC = 2O_1C = 6 \text{ дм},$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(14 + 6) \cdot 3 = 30 \text{ (дм}^2\text{)}.$$

23. В усеченном конусе с высотой OO_1 площадь оснований $S = 16$ дм² и $S_1 = 4$ дм², O_2 — середина OO_1 . Через точку O_2 проведем сечение, параллельное плоскости основания. OA и O_1A_1 — радиусы оснований конуса. Пусть $OA \parallel O_1A_1$, OO_1A_1A — трапеция, O_2A_2 — средняя линия.

$$O_2A_2 = \frac{1}{2}(OA + O_1A_1), \text{ но } O_2A_2 \text{ — радиус сечения, площадь сечения}$$

$$S_2 = \pi \cdot O_2A_2^2. O_2A_2^2 = \frac{1}{4}(OA + O_1A_1)^2, O_2A_2^2 = \frac{1}{4}(OA + O_1A_1)^2; OA = \sqrt{\frac{S}{\pi}};$$

$$O_1A_1 = \sqrt{\frac{S_1}{\pi}}; O_2A_2^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{S}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sqrt{S_1S} + \frac{S_1}{\pi}\right); S_2 = \pi O_2A_2^2 = \pi \cdot \frac{1}{4\pi}\left(S + 2\sqrt{S_1S} + S_1\right) =$$

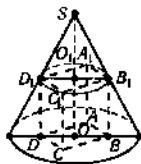
$$= \frac{1}{4}(16 + 2 \cdot \sqrt{16 \cdot 4} + 4) = \frac{36}{4} = 9 \text{ (дм}^2\text{)}$$

24. Решение задачи аналогично предыдущей. $S = M$, $S_1 = m$.

$$\text{Площадь сечения } S_{\text{ср}} = \frac{1}{4}(\sqrt{M} + \sqrt{m})^2.$$

25. Задача решена в учебнике Погорелова.

26*.



Высота конуса $SO = H$, радиус основания $OM = R$. В конус вписан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, основание $ABCD$ куба лежит в плоскости основания конуса, а основание $A_1 B_1 C_1 D_1$ куба лежит в плоскости сечения конуса, параллельной к основанию конуса, и проходит через точку O_1 . Пусть сторона куба x , тогда $OO_1 = x$. Диагональ $B_1 D_1$ основания $A_1 B_1 C_1 D_1$ куба равна $x\sqrt{2}$,

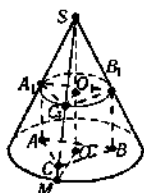
$$O_1D_1 = \frac{1}{2}B_1D_1 = x \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\triangle CD_1O_1 \sim \triangle SMO$, так как $\angle SO_1D_1 = \angle SOM = 90^\circ$, $\angle MSO$ — общий.

$$SO_1 = SO - OO_1, SO_1 = H - x, \frac{SO_1}{SO} = \frac{D_1O_1}{OM}, \frac{H-x}{H} = \frac{x\sqrt{2}}{2R},$$

$$2RH - 2Rx = x\sqrt{2}H, x = \frac{2RH}{2R + \sqrt{2}H} = \frac{\sqrt{2}RH}{H + \sqrt{2}R}.$$

27*

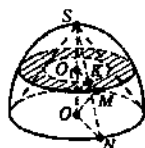


В конус, высота которого $SO = H$, а радиус основания $OM = R$, вписана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, боковые грани которой квадраты. Основание ABC призмы лежит в плоскости основания конуса, основание $A_1B_1C_1$ лежит в плоскости сечения, параллельного основанию конуса. Это сечение является кругом с центром в точке O_1 . Пусть ребро призмы x . $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1 = r$, где r — радиус сечения и радиус описанной вокруг правильного $\triangle A_1B_1C_1$ окружности, $r = \frac{x\sqrt{3}}{3}$. $OO_1 = C_1C =$

$= x$, $SO_1 = SO - OO_1$, $SO_1 = H - x$. $\triangle SO_1C_1 \sim \triangle SOM$, так как $\angle SO_1C_1 = \angle SOM = 90^\circ$, $\angle OSM$ — общий.

$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1C_1}{OM}, \frac{H-x}{H} = \frac{x\sqrt{3}}{3R}, 3RH - 3Rx = x\sqrt{3}H, x = \frac{3RH}{\sqrt{3}H + 3R} = \frac{\sqrt{3}RH}{H + 3R}.$$

28. Конус и полушар имеют общее основание, SO — общая высота.



ON — радиус основания. O_1 — середина SO . O_1K — радиус сечения конуса плоскостью, параллельной основанию, O_1M — радиус сечения полушара той же плоскостью. Пусть радиус полушара $ON = OS = R$. $OO_1 =$

$$= \frac{R}{2}. \text{ Из } \triangle OMO_1: \angle OO_1M = 90^\circ, OM = ON = R, O_1M = \sqrt{OM^2 - OO_1^2}, O_1M = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

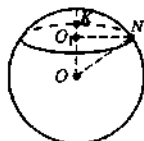
$$\text{Площадь сечения полушара } S_{\text{сеч}} = \pi \cdot O_1M^2 = \frac{3}{4}\pi R^2.$$

$\triangle SO_1K \sim \triangle SON$, бо $\angle SO_1K = \angle SON = 90^\circ$, $\angle OSN$ — общий. $\frac{SO_1}{SO} =$

$$= \frac{O_1K}{ON} = \frac{1}{2}, O_1K = \frac{1}{2}ON = \frac{R}{2}, \text{ площадь сечения конуса } S_{\text{кон}} = \pi \cdot O_1K^2 = \pi \frac{R^2}{4}. \text{ Площадь сечения, которая расположена между боковой}$$

поверхностью конуса и поверхностью полушара $S = S_{\text{пол.}} - S_{\text{кон.}}$, $S = \frac{3}{4}\pi R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi R^2$, где πR^2 — площадь основания.

29. Точка O — центр шара с радиусом $OK = 41$ дм. Через точку O_1 ($OO_1 = 9$ дм) проведем плоскость, перпендикулярную OK . Получим пересечение радиуса O_1N , $ON = OK = 41$ дм.



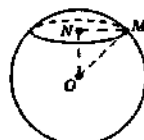
Из $\triangle ONO_1$ $\angle OO_1N = 90^\circ$, $O_1N = \sqrt{ON^2 - OO_1^2}$,

$O_1N = \sqrt{1681 - 81} = 40$ (дм).

Площадь сечения $S = \pi \cdot O_1N^2$, $S = \pi \cdot 1600$ дм² = 16π м².

30. Задача решена в учебнике Погорелова.

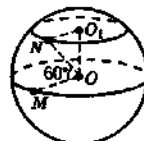
31. Радиус шара с центром в точке O $OM = R$. Через точку M проведем плоскость. N — центр сечения, ON — перпендикуляр к плоскости сечения, NM — проекция радиуса OM на плоскость сечения, $\angle NMO$ — угол между радиусом OM и плоскостью сечения, $\angle NMO = 60^\circ$. $NM = MO \cos 60^\circ$.



$$= \frac{1}{4}\pi R^2.$$

$NM = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$. Площадь сечения $S = \pi \cdot NM^2 =$

32. Радиус земного шара $OM = R$. O_1N — радиус параллели. Пусть $NO_1 \parallel MO$, $\angle NOM = 60^\circ$, OO_1 перпендикулярен к плоскости параллели, $\angle O_1ON = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. $ON = OM = R$,



$O_1N = ON \sin 30^\circ = \frac{R}{2}$. Длина параллели $L = 2\pi \cdot O_1N = 2\pi \cdot \frac{R}{2} = \pi R$.

33. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. За сутки город N преодолевает расстояние $L = \pi R$, $R = 6000$ км, $L \approx 188\,450$ км.

За час город N преодолевает расстояние $l = \frac{1}{24}L$, $l \approx 785$ км.

34. Точки A , B и C лежат на поверхности шара с центром в точке O . Радиус шара $OA = OB = OC = 13$ см, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см.



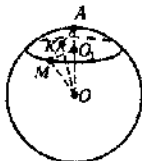
Через точки A , B и C проведем плоскость, получим круг с центром в точке O_1 . OO_1 — перпендикуляр к плоскости ABC . $O_1A = O_1B = O_1C = R$, где R — радиус сечения, то есть радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности.

$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}}$, где площадь $\triangle ABC$ найдем по формуле Герона:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}, \text{ где } p = \frac{6+8+10}{2} = 12 \text{ (см).}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{12(12-6)(12-10)(12-8)} = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4} = 24 \text{ (см}^2\text{)}. R = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 24} = 5 \text{ (см)}. \text{ Из } \triangle OAO_1, \angle OO_1A = 90^\circ; OO_1 = \sqrt{AO^2 - AO_1^2}, OO_1 = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ (см)}.$$

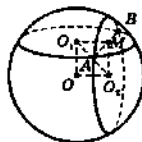
35. Диаметр шара с центром в точке O равен 25 см. Точка A лежит на поверхности шара, AO — радиус шара, $AO = 12,5$ см. Точка A является вершиной конуса, образующая которого $AM = 15$ см. $OM = OA = 12,5$ см. OK — медиана и высота $\triangle AOM$.



$$AK = \frac{1}{2} AM = 7,5 \text{ см. Из } \triangle AOK: \angle AKO = 90^\circ, \cos \angle OAK = \frac{AK}{OA} = \frac{7,5}{12,5} = 0,6. AO_1 \text{ — высота конуса. Из } \triangle AO_1M, \angle AO_1M = 90^\circ,$$

$$O_1M = AM \sin \angle OAK. \text{ Пусть } \angle OAK = \alpha, \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \sin \alpha = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8. O_1M = 15 \cdot 0,8 = 12 \text{ (см)}.$$

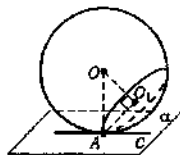
- 36*. Радиус шара с центром в точке O $OA = 7$ см. На поверхности шара есть две равных окружности с центрами в точках O_1 и O_2 , плоскости этих окружностей перпендикулярны. AB — общая хорда, $AB = 2$ см. Рассмотрим $\triangle OO_1A$ и $\triangle OO_2A$. Они равны по общей гипотенузе OA и катетам O_1A и O_2A равны как радиусы равных окружностей. Таким образом, $OO_1 = OO_2$. M — середина AB . OO_1MO_2 — квадрат. Найдем его диагональ OM из



$$\triangle OMA, \angle OMA = 90^\circ; OM = \sqrt{OA^2 - AM^2}, OM = \sqrt{49 - 1} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}. \text{ В } \triangle OO_1M (\angle OO_1M = 90^\circ) OO_1^2 + O_1M^2 = OM^2, 2O_1M^2 = OM^2, O_1M = \frac{OM}{\sqrt{2}}, O_1M = 4\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ (см)}. \text{ В } \triangle AO_1M: \angle AMO_1 = 90^\circ, O_1A = \sqrt{O_1M^2 + AM^2},$$

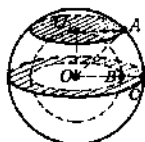
$$O_1A = \sqrt{24 + 1} = 5 \text{ (см)}.$$

37. Через точку A на поверхности шара с центром в точке O проведена касательная к шару плоскость α и некоторая плоскость β , пересекающая шар по кругу с центром O_1 . c — прямая пересечения плоскостей α и β . OA — радиус шара, $OA = R$, OA — перпендикуляр к плоскости α , $OA \perp c$, O_1A — радиус сечения, OO_1 — перпендикуляр к плоскости сечения, O_1A — проекция OA на плоскость сечения. По теореме о трех перпендикулярах $O_1A \perp c$. Плоскость QAO_1 перпендикулярна прямой c и пересекает плоскость α по прямой AB , а плоскость β — по прямой AO_1 . $\angle O_1AB$ — угол между плоскостями α и β , $\angle O_1AB = 30^\circ$, $\angle OAB = 90^\circ$, $\angle OAO_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Из $\triangle OAO_1$, $\angle OO_1A = 90^\circ$, $AO_1 = OA \cdot \cos 60^\circ$, $AO_1 = \frac{R}{2}$.



$$\text{Площадь сечения: } S = \pi \cdot O_1A^2, S = \pi \frac{R^2}{4}.$$

38. Пусть радиусы двух концентрических сферических поверхностей с центром в точке O $OB = r$, $OC = R$, O_1 — центр сечения, касающегося внутренней сферической поверхности, O_1A — его радиус. OO_1 — перпендикуляр к плоскости сечения, $OO_1 = OB = r$, $OA = OC = R$. Из $\triangle OAO_1$, $\angle OO_1A = 90^\circ$, $O_1A = \sqrt{OA^2 - OO_1^2}$, $O_1A = \sqrt{R^2 - r^2}$.



Площадь этого сечения $S_1 = \pi \cdot O_1A^2$, $S_1 = \pi(R^2 - r^2)$.

Площадь большого круга большого шара $S_6 = \pi \cdot OC^2$, $S_6 = \pi R^2$, площадь большого круга меньшего шара $S_m = \pi \cdot OB^2$, $S_m = \pi r^2$. Площадь сечения тела, ограниченного сферическими поверхностями и плоскостью, проходящей через центр $S_n = S_6 - S_m$; $S_n = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = S_1$.

39. Задача решена в учебнике Погорелова.

40. M , N и K — точки касания шара с центром в точке O к сторонам треугольника ABC , $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см. Опустим перпендикуляр OO_1 на плоскость треугольника ABC . O_1M , O_1N и O_1K — проекции наклонных OM , ON и OK на плоскость треугольника. Поскольку $OM \perp AC$, $ON \perp AB$ и $OK \perp BC$, то по теореме о трех перпендикулярах $O_1M \perp AC$, $O_1N \perp AB$, $O_1K \perp BC$. $\triangle OMO_1 = \triangle ONO_1 = \triangle OKO_1$ по гипотенузе ($OM = ON = OK = 5$ см) и общему катету OO_1 .

$O_1M = O_1N = O_1K = r$, точка O_1 — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, r — его радиус.

$$r = \frac{S_{ABC}}{p}, \text{ где } p = \frac{AB + BC + AC}{2}, p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21 \text{ (см).}$$

Площадь $\triangle ABC$ найдем по формуле Герона:

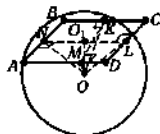
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)},$$

$$S_{ABC} = \sqrt{21(21 - 13)(21 - 14)(21 - 15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$r = \frac{84}{21} = 4 \text{ (см). Из } \triangle OMO_1, \angle OO_1M = 90^\circ, OO_1 = \sqrt{OM^2 - MO_1^2},$$

$$OO_1 = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ (см)}.$$

41. M , N , K и L — точки касания шара с центром в точке O к сторонам ромба $ABCD$. Диагонали ромба $AC = 20$ см, $BD = 15$ см.



$OM = ON = OK = OL = R$, где R — радиус шара, $R = 10$ см. Опустим перпендикуляр OO_1 на плоскость ромба. O_1M , O_1N , O_1K и O_1L — проекции наклонных OM , ON , OK и OL на плоскость ромба. Так как $OM \perp AD$, $ON \perp AB$, $OK \perp BC$ и $OL \perp DC$, то по теореме о трех перпендикулярах $O_1M \perp AD$, $O_1N \perp AB$, $O_1K \perp BC$, $O_1L \perp DC$. Кроме того, $O_1M = O_1N = O_1K = O_1L = r$, где r — радиус вписанной в ромб $ABCD$ окружности. В $\triangle AO_1D$, $\angle AO_1D =$

$= 90^\circ$, O_1M — высота, $AO_1 = \frac{1}{2}AC = 10$ см, $O_1D = \frac{1}{2}BD = 7,5$ см,

$$AD = \sqrt{AO_1^2 + O_1D^2},$$

$$AD = \sqrt{100 + 56,25} = 12,5 \text{ (см)}. S_{AO_1D} = \frac{1}{2}AO_1 \cdot O_1D = \frac{1}{2}AD \cdot MO_1,$$

$$MO_1 = \frac{AO_1 \cdot O_1D}{AD}; MO_1 = \frac{10 \cdot 7,5}{12,5} = 6 \text{ (см)}.$$

$$\text{Из } \triangle OMO_1, \angle OO_1M = 90^\circ, OO_1 = \sqrt{OM^2 - MO_1^2},$$

$$OO_1 = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ (см)}.$$

42. Через касательную c к поверхности шара проведем две взаимно перпендикулярные плоскости, пересекающие шар по кругам с центрами O_1 и O_2 . $O_1A = r_1$, $O_2A = r_2$. OO_1 и OO_2 — перпендикуляры к плоскостям сечений. O_1A — проекция OA на плоскость первого сечения, O_2A — проекция OA на плоскость второго сечения. Так как $AO \perp c$, то по теореме о трех перпендикулярах $O_1A \perp c$ и $O_2A \perp c$. Плоскость O_1AO_2 перпендикулярна к прямой c . $\angle O_1AO_2 =$

$$= 90^\circ. OO_1AO_2 \text{ — прямоугольник, } O_1O = AO_2 = r_2, OA = \sqrt{OO_1^2 + O_1A^2},$$

$$OA = \sqrt{r_2^2 + r_1^2}.$$

43. В усеченный конус с осью OO_1 вписан шар радиусом R . O_1S и OM — радиусы оснований конуса. SM — образующая, OO_1SM — трапеция, OO_1 — ее высота. Опустим высоту SK трапеции, $SK = OO_1 = 2R$, $SK \parallel OO_1$, SK — перпендикуляр к плоскости основания. KM — проекция образующей SM , $\angle SMK = \alpha$.



$$SM = SK : \sin \alpha; SM = \frac{2R}{\sin \alpha}. \text{ Плоскость } OO_1SM$$

пересекает шар по некоторому кругу с центром в точке P , причем точка P принадлежит биссектрисе $\angle OMS$. В $\triangle OPM$, $\angle POM = 90^\circ$,

$$OP = R, \angle OMP = \frac{\alpha}{2}, OM = OP : \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, OM = \frac{R}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}. \text{ Из } \triangle SMK,$$

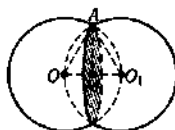
$$\angle SMK = 90^\circ, KM = \frac{2R}{\operatorname{tg} \alpha}, OK = O_1S = OM - KM.$$

$$O_1S = \frac{R}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - \frac{2R}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{R}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - \frac{2R \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

44. Задача решена в учебнике Погорелова.

45. Радиусы шаров $OA = 29$ дм, $O_1A = 25$ дм, расстояние между их центрами $OO_1 = 36$ дм. Шары пересекаются по кругу с центром в точке

M и радиусом AM . Так как OO_1 — перпендикуляр к плоскости сече-



ния, то AM — высота $\triangle OAO_1$. $S_{\triangle OAO_1} = \frac{1}{2} AM \cdot OO_1$. Площадь $\triangle OAO_1$ найдем по формуле Герона:

$$S_{\triangle OAO_1} = \sqrt{p(p - OA)(p - AO_1)(p - OO_1)},$$

$$\text{где } p = \frac{OA + O_1A + OO_1}{2},$$

$$p = \frac{29 + 25 + 36}{2} = 45 \text{ (дм)}. S_{\triangle OAO_1} = \sqrt{45(45 - 29)(45 - 25)(45 - 36)} =$$

$$= \sqrt{45 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 9} = 360 \text{ (дм}^2\text{)}. AM = \frac{2S_{\triangle OAO_1}}{OO_1}, AM = \frac{2 \cdot 360}{36} = 20 \text{ (дм)}. \text{ Дли-}$$

на линии пересечения поверхностей шаров $L = 2\pi \cdot AM$. $L = 2\pi \cdot 20 =$

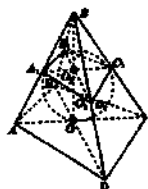
$$= 40\pi \text{ (дм)} = 4\pi \text{ (м)}.$$

46. Шар описан вокруг куба, если все его вершины касаются его поверхности, то есть диагональ куба является диаметром шара. Диагональ

$$\text{куба со стороной } a: d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}, \text{ радиус шара } R = \frac{1}{2}d, R = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

47. Задача решена в учебнике Погорелова.

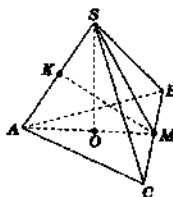
48. Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, в которую вписан шар с центром в точке O_1 . Точки касания шара к боковым граням пирамиды лежат в плоскости, параллельной основанию. Эта плоскость пересекает шар по кругу с центром в точке O_2 , а пирамиду — по квадрату $A_1B_1C_1D_1$. O_2 — центр вписанной в квадрат $A_1B_1C_1D_1$ окружности, точка пересечения его диагоналей.



SO — высота пирамиды $SABCD$, SO_1 — высота пирамиды $SA_1B_1C_1D_1$.

O_1O_2 — перпендикуляр к плоскости сечения. SO_1 и O_1O_2 лежат на одной прямой SO .

49. Имеем: $SABC$ — правильный тетраэдр с ребром a . Точка O — центр описанной вокруг тетраэдра окружности $OA = OB = OC = OS = R$, где R — радиус окружности. SM и AM — высоты треугольников SCB и ABC . $SM = AM =$



$$= \frac{a\sqrt{3}}{2}. \triangle ASM — равнобедренный.$$

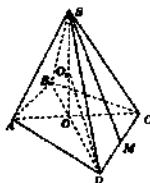
$$MK — медиана и высота, $AK = KS = \frac{a}{2}.$$$

$$\text{Из } \triangle KMS \angle SKM = 90^\circ,$$

$$KM = \sqrt{SM^2 - KS^2}, KM = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \triangle ASO &= \triangle COB \text{ по трем сторонам. Таким образом, } KO = OM = \frac{1}{2} KM = \\ &= \frac{a\sqrt{2}}{4}. \text{ Из } \triangle KOS \angle SKO = 90^\circ, SO = \sqrt{KS^2 + KO^2}, SO = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{16}} = \\ &= \frac{a\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

50. 1) Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида со стороной основания a . $\angle DSC = \alpha$. SM — медиана, высота



и биссектриса $\triangle SCD$. $DM = MC = \frac{a}{2}$.

$$\text{Из } \triangle SDM \angle SMD = 90^\circ, SD = \frac{DM}{\sin \frac{\alpha}{2}}, SD = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Диагональ квадрата } BD &= \sqrt{AB^2 + AD^2}, BD = \\ &= \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}. \end{aligned}$$

SO — высота пирамиды, точка O_1 — точка пересечения диагоналей квадрата, центр окружности, описанной вокруг пирамиды $SABCD$. O_1 лежит на высоте пирамиды. $O_1S = O_1D = R$, где R — радиус окружности. Из $\triangle SDO$, $\angle SOD = 90^\circ$, $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2}$, $OD = \frac{1}{2} BD$,

$$OD = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$SO = \sqrt{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 - 2a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos \alpha}.$$

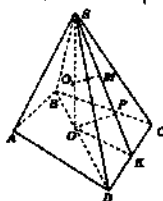
$$OO_1 = SO - SO_1 = SO - R. \text{ В } \triangle O_1OD, \angle O_1OD = 90^\circ, O_1D^2 = OO_1^2 + OD^2.$$

$$R^2 = \left(\frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos \alpha} - R \right)^2 + \frac{2a^2}{4}, R^2 = \frac{a^2 \cos \alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{aR\sqrt{\cos \alpha}}{\sin \frac{\alpha}{2}} + R^2 + \frac{2a^2}{4}.$$

$$\frac{aR\sqrt{\cos \alpha}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2 \cos \alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2 \cos \alpha + 2a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{a^2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}; R = \frac{a}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}}.$$

- 2) Точка O_1 — центр вписанной в пирамиду $SABCD$ окружности. SK — апофема, OK — проекция апофемы SK на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $OK \perp DC$. DC — перпендикуляр к плоскости SOK . Плоскость SDC , проходящая через него, перпендикулярна плоскости SOK . SK — прямая пересечения. Из точки O_1 опустим перпендикуляр O_1M на прямую SK . O_1M — перпендикуляр к плоскости SDC . O_1M — радиус вписанной окружности. $OO_1 = O_1M = r$.



$$\text{Из } \triangle SDK, \angle SKD = 90^\circ, SK = \frac{DK}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, SK = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Из } \triangle SKO, \angle SOK = 90^\circ, SO = \sqrt{SK^2 - OK^2}, OK = \frac{a}{2}.$$

$$SO = \sqrt{\frac{a^2}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\sin \angle OSK = \frac{OK}{SK}, \sin \angle OSK = \frac{a}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{a} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. OP \text{ — перпендикуляр к } SK,$$

$$OP \parallel O_1M. OP = SO \sin \angle OSK, OP = \frac{a}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\triangle SO_1M \sim \triangle SOP.$$

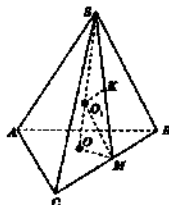
$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1M}{OP} = \frac{SO - OO_1}{SO}, \frac{r}{OP} = \frac{SO - r}{SO}, r \cdot SO = OP \cdot SO - OP \cdot r,$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{OP \cdot SO}{SO + OP}, r = \frac{\frac{a}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{a}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

- 51*. Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида, SO — высота. Точка O_1 — центр описанной вокруг пирамиды $SABC$ сферы. $O_1S = O_1A = O_1B = O_1C = R$. $\angle CSB = \alpha$, SM — апофема, SM является биссектрисой $\angle CSB$, $\angle CSM = \frac{\alpha}{2}$.

$$H = 2\sqrt{R^2 - a^2}.$$

53. $SABC$ — правильная треугольная пирамида со стороной основания a .



SO — высота, точка O_1 — центр вписанной в пирамиду окружности. SM — апофема, OM — ее проекция. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp BC$. OM — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Радиус окружности, вписанной в правильный n -угольник, определяется по формуле $r_1 = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$.

$$\angle SMO = \varphi.$$

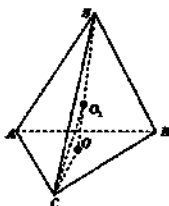
Плоскости SBC и SOM перпендикулярны. SM — прямая пересечения. Из точки O_1 опустим перпендикуляр O_1K на прямую SM , O_1K — перпендикуляр к плоскости SCB , O_1K — радиус вписанной окружности. $OO_1 = O_1K = r_1$.

$\triangle OO_1M = \triangle O_1KM$, т.к. $\angle O_1OM = \angle O_1KM = 90^\circ$, гипотенуза O_1M общая.

$$\angle OMO_1 = \angle O_1MK = \frac{1}{2} \angle OMK = \frac{\varphi}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle OO_1M: OO_1 = OM \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, r_1 = OO_1 = \frac{OM \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

54. Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида со стороной a .



SO — ее высота, O_1 — центр описанной вокруг пирамиды окружности. $O_1S = O_1C = R$. OC — проекция бокового ребра SC на плоскость основания. $\angle SCO = \alpha$. Для правильной пирамиды основание высоты — центр описанной вокруг основания пирамиды окружности. Радиус этой окружности для n -угольной

$$\text{пирамиды } R_1 = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}. OC = R_1. \angle CSO =$$

$$= 90^\circ - \alpha, \triangle CO_1S \text{ — равнобедренный.}$$

$$\angle SCO_1 = \angle CSO_1 = 90^\circ - \alpha. \angle O_1CO = \angle SCO - \angle SCO_1, \\ \angle O_1CO = \alpha - 90^\circ + \alpha = 2\alpha - 90^\circ.$$

$$\text{Из } \triangle CO_1O: \angle COO_1 = 90^\circ, CO_1 = \frac{CO}{\cos \angle O_1CO},$$

$$CO_1 = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos(2\alpha - 90^\circ)} = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos(90^\circ - 2\alpha)} = \\ = \frac{a}{2 \sin 2\alpha \sin \frac{180^\circ}{n}}.$$

§ 7. Объемы многогранников

1. $V_1 = 3^3 = 27 \text{ (см}^3\text{)}, V_2 = 4^3 = 64 \text{ (см}^3\text{)}, V_3 = 5^3 = 125 \text{ (см}^3\text{)}$. После переплавки объем большого куба $V = V_1 + V_2 + V_3 = 27 + 64 + 125 = 216 \text{ (см}^3\text{)}$. Ребро

этого куба $x = \sqrt[3]{V} = 6 \text{ см}$.

2. Объем куба с ребром 10,2 см $V_{\text{внешн}} = (10,2)^3 = 1\,061,208 \text{ (см}^3\text{)}$. Внутреннее ребро куба $10,2 - 2 \cdot 0,1 = 10 \text{ см}$. Объем внутреннего куба $V_{\text{внутр}} = 10^3 = 1\,000 \text{ см}^3$. Объем стенок $V_{\text{ст}} = V_{\text{внешн}} - V_{\text{внутр}} = 1\,061,208 - 1\,000 = 61,208 \text{ (см}^3\text{)}$. Масса стенок $m_{\text{ст}} = 514,15 \text{ г}$. Плотность металла $\rho = \frac{m_{\text{ст}}}{V_{\text{ст}}}$, $\rho = \frac{514,15}{61,208} = 8,4 \text{ (г/см}^3\text{)}$.

3. Задача решена в учебнике Погорелова.

4. Пусть a — начальная длина ребра, тогда $(a + 1)^3 = 125 a^3$, $(a + 1)^3 = (5a)^3$, $a + 1 = 5a$, $4a = 1$, $a = 0,25 \text{ (м)}$.

5. Объем кирпича $V = 25 \cdot 12 \cdot 6,5 = 1950 \text{ (см}^3\text{)}$. Его масса $m = 3,51 \text{ кг}$,

откуда плотность $\rho = \frac{m}{V} = \frac{3,51 \text{ кг}}{1950 \text{ см}^3} = \frac{3510 \text{ г}}{1950 \text{ см}^3} = 1,8 \text{ г/см}^3$.

6. Обозначим высоту резервуара x , тогда $2,5 \cdot 1,75 \cdot x = 10$, $x = \frac{10}{4,375} \approx 2,29 \text{ (м)}$.

7. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = 15 \cdot 50 \cdot 36 = 27\,000 \text{ м}^3$.

Ребро равновеликого ему куба $x = \sqrt[3]{V}$, $x = 30 \text{ м}$.

8. Объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями 3 см, 4 см, 5 см:

$V_1 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ (см}^3\text{)}$. Его полная поверхность $S_{\text{полн}} = 2(3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5) = 94 \text{ (см}^2\text{)}$. Если каждое ребро увеличить на x см, то:

$S_{\text{полн}} = 2((3 + x)(4 + x) + (4 + x)(5 + x) + (3 + x)(5 + x)) = 94 + 54 = 148$.

$12 + 7x + x^2 + 20 + 9x + x^2 + 15 + 8x + x^2 = 74$.

$3x^2 + 24x + 47 = 74$, $3x^2 + 24x - 27 = 0$, $x^2 + 8x - 9 = 0$.

По теореме Виета $x_1 = 1$, $x_2 = -9$ — не удовлетворяет условию задачи.

После увеличения объема параллелепипеда $V_2 = (3 + 1)(4 + 1)(5 + 1) = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \text{ (см}^3\text{)}$.

$\frac{V_2}{V_1} = 2$, то есть объем параллелепипеда увеличился вдвое.

9. Внешний объем погонного метра трубы $V_{\text{внешн}} = 25 \cdot 25 \cdot 100 = 62\,500 \text{ (см}^3\text{)}$.

Внутренняя ширина трубы $25 - 2 \cdot 3 = 19 \text{ (см)}$. Внутренний объем одного погонного метра трубы $V_{\text{вн}} = 19 \cdot 19 \cdot 100 = 36\,100 \text{ (см}^3\text{)}$.

Объем чугуна, из которого изготовлена труба, $V_{\text{ч}} = V_{\text{внешн}} - V_{\text{вн}}$, $V_{\text{ч}} = 62\,500 - 36\,100 = 26\,400 \text{ (см}^3\text{)}$.

Масса одного погонного метра трубы $m = \rho \cdot V_{\text{ч}}$

$m = 7,3 \cdot 26\,400 = 192\,720 \text{ г} = 192,72 \text{ кг}$.

10. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, диагональ которого a . $A_1 D$ — проекция диагонали $B_1 D$ на боковую грань $AA_1 D_1 D$. $\angle B_1 D A_1$ — угол между диагональю $B_1 D$ и боковой гранью. $\angle B_1 D A_1 = \beta$. Из $\triangle A_1 B_1 D$, $\angle B_1 A_1 D = 90^\circ$, $A_1 D = B_1 D \cos \beta = a \cos \beta$. BD — проекция диагонали $B_1 D$ на плоскость основания $ABCD$. $\angle B_1 D B$ — угол между диагональю $B_1 D$ и плоскостью основания. $\angle B_1 D B = \alpha$. Из $\triangle BB_1 D$, $\angle B_1 B D = 90^\circ$, $BD = a \cos \alpha$. Пусть $AA_1 = x$, $AB = y$,

$AD = z$, тогда

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \cos^2 \beta, \\ y^2 + z^2 = a^2 \cos^2 \alpha, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \end{cases}$$

$$y^2 = a^2 - a^2 \cos^2 \beta = a^2(1 - \cos^2 \beta) = a^2 \sin^2 \beta, \quad y = a \sin \beta.$$

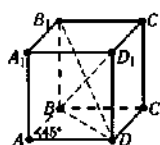
$$x^2 = a^2 - a^2 \cos^2 \alpha = a^2(1 - \cos^2 \alpha) = a^2 \sin^2 \alpha, \quad x = a \sin \alpha.$$

$$z^2 = a^2 - a^2 \sin^2 \beta - a^2 \sin^2 \alpha = a^2(1 - \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) = a^2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta),$$

$$z = a \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}. \text{ Объем прямоугольного параллелепипеда } V = x \cdot y \cdot z = a \sin \alpha \cdot a \sin \beta \cdot a \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta} = a^3 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}.$$

11. Задача решена в учебнике Погорелова.

12. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед. $AB = 2\sqrt{2}$ см,



$AD = 5$ см, $\angle BAD = 45^\circ$. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, $BC = AD$. По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$, $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \times \times AD \cdot \cos \angle BAD$.

Но $\angle ABC$ — тупой, $AC^2 > BD^2$, $AC > BD$. BD — меньшая диагональ основания.

$$BD = \sqrt{8 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{2} \cos 45^\circ} = \sqrt{33 - 20\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{13} \text{ (см)}.$$

AC и BD — проекции диагоналей параллелепипеда $A_1 C$ и $B_1 D$ соответственно. Так как $BB_1 = AA_1$, то меньшей наклонной соответствует меньшая проекция. $B_1 D$ — меньшая диагональ параллелепипеда. $B_1 D = 7$ см. В $\triangle B_1 B D$ $\angle B_1 B D = 90^\circ$, найдем $B_1 B$:

$$B_1 B = \sqrt{B_1 D^2 - BD^2}, \quad B_1 B = \sqrt{49 - 13} = 6 \text{ (см)}. \text{ Объем параллелепипеда } V = S_{\text{осн}} \cdot H, \text{ где } H = B_1 B, S_{\text{осн}} = AB \cdot AD \sin \angle BAD.$$

$$S_{\text{осн}} = 2\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 \text{ (см}^2\text{)}. V = 10 \cdot 6 = 60 \text{ (см}^3\text{)}.$$

13. Пусть диагонали ромба x и y , тогда $S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} xy = 1 \text{ м}^2$, $xy = 2$. Обозначим через h высоту параллелепипеда. Тогда площади диагональных сечений $xh = 3$, $yh = 6$, $y = \frac{2}{x}$,

$$xh = 3, \quad yh = 6, \quad y = \frac{2}{x},$$

$$\frac{2}{x}h = 6, h = 3x, 3x^2 = 3, x^2 = 1, x = 1. \text{ Тогда } h = 3 \cdot 1 = 3 \text{ (м).}$$

$$\text{Объем параллелепипеда } V = S_{\text{осн}} \cdot h, V = 1 \cdot 3 = 3 \text{ (м}^3\text{)}.$$

14. Пусть диагонали ромба x и y , тогда $S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2}xy = Q, xy = 2Q$. Высота

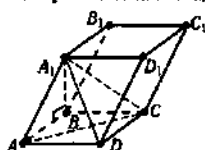
$$\text{ромба } h. \text{ Площади диагональных сечений } xh = M, yh = N. y = \frac{2Q}{x},$$

$$\frac{2Q}{x} \cdot h = N, h = \frac{Nx}{2Q}, x \frac{Nx}{2Q} = M, x^2 = \frac{2QM}{N}, x = \sqrt{\frac{2QM}{N}}, h = \frac{N}{2Q} \sqrt{\frac{2QM}{N}} =$$

$$= \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{NMQ}{2}}.$$

$$\text{Объем параллелепипеда } V = S_{\text{ромба}} \cdot h, V = Q \cdot \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{NQM}{2}} = \sqrt{\frac{NQM}{2}}.$$

15. Имеем $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ — наклонный параллелепипед, в основании которого лежит квадрат $ABCD$ со стороной 1 м. AA_1 — боковое ребро,



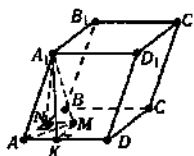
$AA_1 = 2$ м, $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 60^\circ$. Из точки A_1 опустим перпендикуляры A_1N, A_1M на стороны AB и AD и перпендикуляр A_1K на плоскость основания. Рассмотрим $\triangle AA_1N$ и $\triangle AA_1M$. Они равны по общей гипотенузе и прилежающим к ней углам. $AN = AM = AA_1 \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ (м).

Таким образом, точка N совпадает с вершиной B параллелепипеда, а точка M — с вершиной D . BK и DK — проекции наклонных A_1B и A_1D на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $BK \perp AB$ и $DK \perp AD$. Но $AB \perp BC$ и $AD \perp DC$, то есть точка K принадлежит сторонам BC и DC одновременно, следовательно, точка K сов-

падает с точкой C . Из $\triangle AA_1D$ $A_1D = AA_1 \sin 60^\circ$, $A_1D = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см).

Из $\triangle A_1DC$: $\angle A_1CD = 90^\circ, A_1C = \sqrt{A_1D^2 - DC^2}, A_1C = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}$ (м).
Объем наклонного параллелепипеда $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, где $S_{\text{осн}} = 1 \text{ м}^2, H =$
 $= A_1C = \sqrt{2}$ м. $V = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$ (м³).

- 16*. Имеем $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, у которого все грани — ромбы со стороной a и острым углом 60° . A_1N и A_1K — высоты боковых



граней AA_1B_1B и AA_1D_1D . Так как грани равны, то $A_1N = A_1K$. $\triangle A_1AN = \triangle A_1AK$ по катету и общей гипотенузе A_1A . $AN = AK = AA_1 \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$.

Из точек N и K в плоскости $ABCD$ проведем перпендикуляры, которые пересекутся в некоторой точке M . A_1M — высота параллелепипеда. $\triangle A_1NM = \triangle A_1KM$ по общей гипотенузе и равному катету.

$NM = KM$, точка M принадлежит биссектрисе $\angle BAD$, то есть диагонали AC ромба $ABCD$.

Из $\triangle AMK$: $\angle AKM = 90^\circ$, $\angle MAK = 30^\circ$;

$$AM = AK : \cos 30^\circ, AM = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}. \text{ Из } \triangle A_1AM: \angle A_1MA = 90^\circ,$$

$$\text{найдем } A_1M: A_1M = \sqrt{AA_1^2 - AM^2}, A_1M = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \text{ Объем параллелепипеда } V = S_{\text{осн}} \cdot H,$$

$$\text{где } S_{\text{осн}} = a^2 \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}, H = A_1M, V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}.$$

17*. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. Каждое ребро параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1 см. $\angle A_1AD = \angle A_1AB = \angle BAD = 2\alpha$.

A_1K и A_1N — высоты боковых граней $AA_1 D_1 D$ и $AA_1 B_1 B$. Так как грани равны, то $A_1K = A_1N$. $\triangle A_1AK = \triangle A_1AN$ по катету и общей гипотенузе. $AK = AN = A_1A \cdot \cos 2\alpha = \cos 2\alpha$. Через точки N и K в плоскости основания построим перпендикуляры. Они пересекутся в некоторой точке M . A_1M — высота параллелепипеда. $\triangle A_1MN = \triangle A_1KM$ по гипотенузе и общему катету. Таким образом, $NM = KM$, точка M принадлежит биссектрисе $\angle BAD$, то есть диагонали AC ромба $ABCD$.

$$\text{Из } \triangle AMK: \angle AKM = 90^\circ, \angle MAK = \alpha, AM = \frac{AK}{\cos \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}.$$

Объем параллелепипеда $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, где $S_{\text{осн}} = AB \cdot AD \sin 2\alpha = \sin 2\alpha$, $H = A_1M$. A_1M найдем из $\triangle A_1AM$, $\angle A_1MA = 90^\circ$,

$$\begin{aligned} A_1M &= \sqrt{AA_1^2 - AM^2}, A_1M = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 2\alpha}{\cos^2 \alpha}} = \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{3 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha (2 \cos^2 \alpha + \cos 2\alpha)}{\cos^2 \alpha}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin \alpha (\cos^2 \alpha \sin \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha)}{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\sin \alpha (\cos \alpha \cdot \sin 2\alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha)}{\cos^2 \alpha}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin \alpha \sin 3\alpha}{\cos^2 \alpha}}. V = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \sqrt{\frac{\sin \alpha \sin 3\alpha}{\cos^2 \alpha}} = 2 \sqrt{\sin^2 \alpha \sin 3\alpha}. \end{aligned}$$

18*. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник $ABCD$. $AD = a$, $DC = b$, $D_1D = c$, $\angle D_1DA = \angle D_1DC = \alpha$. Из точки D_1 опустим высоты граней $AA_1 D_1 D$ и $DD_1 C_1 C$ D_1K и D_1N .

$\triangle KD_1D = \triangle DD_1N$ по общей гипотенузе и острому углу. $KD = DN = D_1D \cdot \cos \alpha = c \cdot \cos \alpha$. Через точки K и N в плоскости основания построим перпендикуляры к сторонам AD и DC . Они пересекутся в точке M . D_1M — высота параллелепипеда. $\triangle D_1KM = \triangle D_1NM$ по гипотенузе и общему катету. $MN = KN$, следовательно, точка M лежит на биссектрисе $\angle ADC$, $\angle NDM = \angle KDM = 45^\circ$. Из $\triangle MDN$ найдем MD :

$$MD = \frac{DN}{\cos 45^\circ}, MD = c \cos \alpha \cdot \sqrt{2}. \text{ Из } \triangle D_1DM, \angle D_1MD = 90^\circ, \text{ найдем } D_1M:$$

$$D_1M = \sqrt{D_1D^2 - MD^2}, D_1M = \sqrt{c^2 - 2c^2 \cos^2 \alpha} = c\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = c\sqrt{-\cos^2 2\alpha}.$$

Объем параллелепипеда $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, где $S_{\text{осн}} = ab$, $H = D_1M$.

$$V = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

19. $V_{\text{призм}} = S_{\text{осн}} \cdot h$. Для правильной призмы h — боковое ребро, $h = b$.

1) Площадь правильного треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot b$.

2) Площадь квадрата $S = a^2$. $V = a^2b$.

3) Площадь правильного шестиугольника $S = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$ (задача 14, § 5).

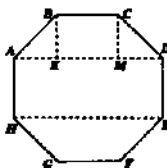
$$V = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} \cdot b.$$

20. Объем призмы $V = S_{\text{осн}} \cdot h$, $h = 0,7$ см. В основании призмы лежит правильный восьмиугольник со стороной 3,2 см. Сумма углов восьмиугольника $180^\circ(8 - 2) = 1080^\circ$, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = \angle G = \angle H = \frac{1}{8} \cdot 1080^\circ = 135^\circ$.

Разобьем восьмиугольник на две равные трапеции $ABCD$ и $EFGH$ и прямоугольник $ADEH$. CM и BK — высоты трапеции $ABCD$. $\angle BAK = \angle CDM = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$. В $\triangle CMD$, $\angle CMD = 90^\circ$, $CM = MD = CD \cos 45^\circ = 3,2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} CM$.

$$AK = MD = 3,2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} CM. AD = 2AK + KM, \text{ где } KM = BC = 3,2 \text{ см.}$$

$$AD = 3,2 \cdot \sqrt{2} + 3,2 = 3,2(\sqrt{2} + 1) \text{ (см)}. S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CM,$$



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(3,2 + 3,2(\sqrt{2} + 1)) \cdot 3,2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(3,2(\sqrt{2} + 2) \cdot 3,2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot (3,2)^2 \cdot (1 + \sqrt{2}) =$$

$$\approx 12,36 \text{ (см}^2\text{)}. S_{EFGH} = S_{ABCD} \approx 12,36 \text{ см}^2.$$

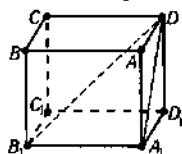
$$S_{ADEH} = AD \cdot DE = 3,2(\sqrt{2} + 1) \cdot 3,2 = 24,72 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{ABCDEFGH} = 2 \cdot S_{ABCD} + S_{ADEH} \approx 2 \cdot 12,36 + 24,72 = 49,44 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$V = 49,44 \cdot 0,7 = 34,6 \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$\rho = \frac{m}{V}, m = 17,3 \text{ г}, \rho = \frac{17,3}{34,6} \approx 0,5 \text{ г/см}^3.$$

21. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — правильная четырехугольная призма. $A_1 D = 2,5$ см, $B_1 D = 3,5$ см. Пусть сторона основания равна a , а боковое ребро — b . Тогда



$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 6,25, \\ 2a^2 + b^2 = 12,25; \end{cases}$$

$$a^2 = 6, a = \sqrt{6}, 6 + b^2 = 6,25; b^2 = 0,25; b = 0,5.$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h, h = b = 0,5 \text{ см}; S_{\text{осн}} = a^2 = 6 \text{ см}^2.$$

$$V = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ (см}^3\text{)}.$$

22. Для правильного треугольника со стороной a $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, боковая по-

верхность правильной призмы $S_b = P \cdot h$, где h — боковое ребро, $P =$

$$= 3a, S_b = 2S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} :$$

$$3a \cdot h = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}, h = \frac{a \sqrt{3}}{6}. \text{ Объем призмы } V = S_{\text{осн}} \cdot h, V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{a^3}{8}.$$

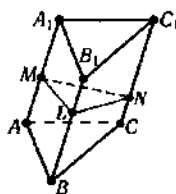
23. Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы $S_{\Delta} = h \cdot d$, где d — диаметр описанной вокруг правильного шестиугольника окружности, $d = 2a$, где a — сторона шестиугольника, h — высота призмы. $S_{\Delta} = 4 \text{ м}^2$. Расстояние l между двумя противоположными боковыми гранями $l = a \sqrt{3}$ (задача 14, § 5).

$$a = \frac{l}{\sqrt{3}}, l = 2 \text{ м}, a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ см}, S_{\text{осн}} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} \text{ (задача 14, § 5)}.$$

$$h = \frac{S_{\Delta}}{2a}, h = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ (см)}. V = S_{\text{осн}} \cdot h, V = \frac{4 \cdot 3}{9} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 6 \text{ (см}^3\text{)}.$$

24. Задача решена в учебнике Погорелова.

25.



$ABCA_1 B_1 C_1$ — наклонная треугольная призма, боковые ребра которой равны 15 м. MN — расстояние между ребрами AA_1 и CC_1 . $MN = 26$ м, ML — расстояние между ребрами AA_1 и BB_1 , $ML = 25$ м. $ML \perp AA_1$, $MN \perp AA_1$, следовательно, плоскость MLN перпендикулярна ребру AA_1 , а значит, и ребрам BB_1 и CC_1 , так как все они параллельны.

$NL \perp BB_1$, $NL \perp CC_1$. NL — расстояние между ребрами BB_1 и CC_1 , $NL = 17$ м.

Объем призмы $V = S_{MNL} \cdot l$, где l — боковое ребро призмы (см. задачу 24). Площадь $\triangle MNL$ найдем по формуле Герона:

$$S_{MNL} = \sqrt{p(p-MN)(p-ML)(p-NL)}, \text{ где } p = \frac{MN+ML+NL}{2},$$

$$p = \frac{25+26+17}{2} = 34 \text{ (м)}. S_{MNL} = \sqrt{34(34-25)(34-26)(34-17)} =$$

$$= \sqrt{34 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 17} = 204 \text{ (м}^2\text{)}. V = 204 \cdot 15 = 3060 \text{ (м}^3\text{)}$$

26. За одну секунду через трубу проходит объем воды $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, где $H = 2$ м.

$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} a \cdot h$, где a — основание треугольника, $a = 1,4$ м, h — его высота, $h = 1,2$ м.

$$V = \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 1,2 \cdot 2 = 1,68 \text{ (м}^3\text{/с)}. 1 \text{ час} = 3600 \text{ сек. Таким образом,}$$

пропускная способность трубы $V_{\text{час}} = 1,68 \cdot 3600 = 6048 \text{ (м}^3\text{/час)}$.

27. Площадь сечения $S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$, где a и b — основания трапеции, $a =$

$$= 14 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, h — \text{ее высота, } h = 3,2 \text{ м}. S = \frac{1}{2}(14+8) \cdot 3,2 = 35,2 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Объем земли, приходящейся на 1 км насыпи, $V = S \cdot H$, где $H = 1$ км = 1000 м.

$$V = 35,2 \cdot 1000 = 35200 \text{ (м}^3\text{)}.$$

28. Объем правильной треугольной призмы $V = S_{\text{осн}} \cdot h$, где h — боковое ребро. Площадь основания найдем по формуле Герона: $S_{\text{осн}} =$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } a = 4 \text{ см}, b = 5 \text{ см}, c = 7 \text{ см}, p = \frac{a+b+c}{2},$$

$$p = \frac{5+7+4}{2} = 8 \text{ (см)}. S_{\text{осн}} = \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{96} =$$

$$= 4\sqrt{6} \text{ (см}^2\text{)}. \text{ Но } S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c, \text{ где } h_a, h_b \text{ и } h_c — \text{вы-}$$

соты, опущенные на стороны a, b и c соответственно. Из этого соотношения следует, что большее основание треугольника опущено на

меньшую сторону, то есть $h_a \cdot h_b = \frac{2S_{\text{осн}}}{a}, h_a = \frac{2 \cdot 4\sqrt{6}}{4} = 2\sqrt{6} \text{ (см)}. h = h_a =$

$$= 2\sqrt{6} \text{ см}. V = 4\sqrt{6} \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = 48 \text{ (см}^3\text{)}.$$

29. Площадь основания прямой треугольной призмы $S_{\text{осн}} = 4 \text{ см}^2$. Площади боковых граней $S_a = ah = 9 \text{ см}^2, S_b = bh = 10 \text{ см}^2, S_c = ch = 17 \text{ см}^2$, где h — высота призмы;

a, b и c — стороны основания.

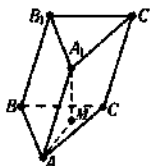
$$a = \frac{9}{h}, b = \frac{10}{h}, c = \frac{17}{h}. \text{ По формуле Герона } S_{\text{осн}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}, p = \frac{\frac{9}{h} + \frac{10}{h} + \frac{17}{h}}{2} = \frac{36}{2h} = \frac{18}{h}.$$

$$S_{\text{осн}} = \sqrt{\frac{18}{h} \left(\frac{18}{h} - \frac{9}{h} \right) \left(\frac{18}{h} - \frac{10}{h} \right) \left(\frac{18}{h} - \frac{17}{h} \right)} = \sqrt{\frac{18}{h} \cdot \frac{9}{h} \cdot \frac{8}{h} \cdot \frac{1}{h}} = \frac{36}{h^2}, h^2 = \frac{36}{4} = 9, h = 3 \text{ см.}$$

Объем прямой призмы $V = S_{\text{осн}} \cdot h, V = 4 \cdot 3 = 12 \text{ (см}^3\text{)}.$

30. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — призма, в основании которой лежит $\triangle ABC$, $AB = AC = 3 \text{ см}, BC = 2 \text{ см}, AA_1 = 4 \text{ см}$. Из точки A_1 опустим перпендикуляр A_1M на плоскость основания. A_1M — высота призмы. AM — проекция ребра A_1A на плоскость основания. $\angle A_1AM = 45^\circ$. $A_1M =$



$$= AA_1 \sin 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ (см). Объем призмы}$$

$V = S_{\text{осн}} \cdot H$, где $H = A_1M$. $S_{\text{осн}}$ найдем по формуле

Герона:

$$S_{\text{осн}} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}, \text{ где}$$

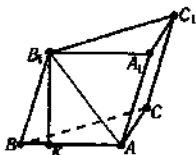
$$p = \frac{AB+AC+BC}{2}, p = \frac{3+3+2}{2} = 4 \text{ (см).}$$

$$S_{\text{осн}} = \sqrt{4(4-3)(4-3)(4-2)} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$V = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ребро равностороннего куба $a = \sqrt[3]{V}, a = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ (см)}.$

31. Имеем $ABCA_1B_1C_1$ — наклонную призму, в основании которой лежит равносторонний $\triangle ABC$ со стороной a . Боковая грань AA_1B_1B — ромб,



то есть боковые ребра призмы тоже равны a . Плоскость грани AA_1B_1B перпендикулярна к плоскости основания. B_1K — высота ромба AA_1B_1B , B_1K — высота призмы. AB_1 — диагональ ромба AA_1B_1B , $AB_1 = c$.

$$S_{AB_1B} = \sqrt{p(p-AB_1)(p-B_1B)(p-AB)},$$

$$p = \frac{c+2a}{2},$$

$$S_{AB_1B} = \sqrt{\frac{c+2a}{2} \left(\frac{c+2a}{2} - a \right) \left(\frac{c+2a}{2} - c \right)} = \sqrt{\frac{c+2a}{2} \cdot \frac{c^2}{4} \cdot \frac{2a-c}{2}} =$$

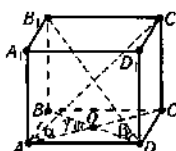
$$= \sqrt{\frac{c^3(4a^2-c^2)}{16}} = \frac{1}{4} c \sqrt{4a^2-c^2}. \text{ Но } S_{AB_1B} = \frac{1}{2} AB \cdot B_1K, B_1K = \frac{2S_{AB_1B}}{AB},$$

$$B_1K = \frac{c}{2a} \sqrt{4a^2-c^2}.$$

Объем призмы $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, где $S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $H = B_1K$.

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{c}{2a} \sqrt{4a^2 - c^2} = \frac{1}{8} ac \sqrt{12a^2 - 3c^2}.$$

32. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямая четырехугольная призма. $BB_1 = h$, $\angle AOB = \gamma$. BD и AC — проекции диагоналей призмы B_1D и AC_1 на плоскость основания. $\angle B_1DB$ и $\angle C_1AC$ — углы между этими диагоналями и плоскостью основания. $\angle B_1DB = \alpha$, $\angle C_1AC = \beta$.



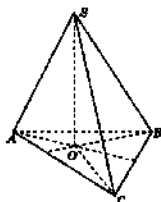
Из $\triangle B_1BD$, $\angle B_1BD = 90^\circ$, $BD = h \operatorname{ctg} \alpha$,
из $\triangle C_1AC$, $\angle C_1CA = 90^\circ$, $AC = h \operatorname{ctg} \beta$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \gamma, S_{ABCD} = \frac{1}{2} h^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \sin \gamma.$$

Объем призмы $V = S_{\text{осн}} \cdot h$, где $S_{\text{осн}} = S_{ABCD}$.

$$V = \frac{1}{2} h^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \sin \gamma.$$

33. 1) $SABC$ — правильная треугольная пирамида со стороной основания a и боковым ребром b . SO — высота. $\triangle SAO = \triangle SBO = \triangle SCO$ по гипотенузе и общему катету. $AO = BO = CO$, точка O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности.



$$AO = BO = CO = R, \text{ где } R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

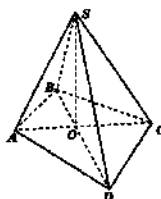
Из $\triangle SAO$, $\angle SOA = 90^\circ$, по теореме Пифагора найдем SO :

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}, SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2 \cdot 3}{9}} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3b^2 - a^2} = \frac{a^2}{12} \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

- 2) $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. $AB = a$, $SA = b$. SO — высота. Точка O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности.



$$AO = BO = CO = DO = R, \text{ для квадрата } R = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Из } \triangle SAO,$$

$\angle SOA = 90^\circ$, по теореме Пифагора найдем SO :

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}, SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

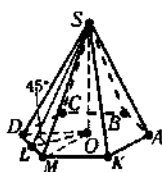
Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{\text{осн}} = a^2$.

$$V = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} a^2 \sqrt{2b^2 - a^2} = \frac{1}{6} a^2 \sqrt{4b^2 - 2a^2}.$$

3) Для случая правильной шестиугольной пирамиды решение ана-

логично. Но $R = a$, $S_{\text{осн}} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$ (задача 14, § 5). $H = \sqrt{b^2 - R^2}$, $H = \sqrt{b^2 - a^2}$. $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{a^2}{2} \sqrt{3b^2 - 3a^2}$.

34. Пусть $SABCDMK$ — правильная шестиугольная пирамида со стороной



основания a . Боковые грани — равные равнобедренные треугольники. В $\triangle MSD$ проведем медиану SL , SL — апофема. SO — высота пирамиды. Точка O — центр вписанного в шестиугольник $ABCDMK$ окружности. OL — проекция наклонной SL на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $OL \perp MD$. $\angle SLO$ — двугранный угол при основании.

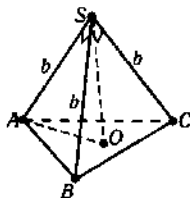
$\angle SLO = 45^\circ$. $SO = OL$. OL — радиус вписанной в

шестиугольник $ABCDMK$ окружности. $OL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $SO = OL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{\text{осн}} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$ (зада-

ча 14, § 5). $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} a^3$.

35. Пусть $SABC$ — треугольная пирамида. $\angle ASC = \angle CSB = \angle ASB = 90^\circ$, $SA = SC = SB = b$. $\triangle ASC = \triangle CSB = \triangle ASB$ по двум катетам.



$$AC = AB = BC = \sqrt{AS^2 + SC^2} = b\sqrt{2}.$$

Пирамида $SABC$ — правильная, SO — высота.

Точка O — центр описанной вокруг треугольника

ABC окружности. $AO = BO = CO = R$, где $R = \frac{b\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} =$

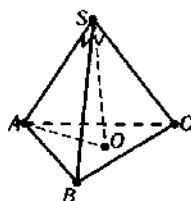
$$= \frac{b\sqrt{6}}{3}. \text{ Из } \triangle SAO \angle SOA = 90^\circ, SO = \sqrt{SA^2 - AO^2},$$

$$SO = \sqrt{b^2 - \frac{6b^2}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3} b. \text{ Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H, \text{ где } H = SO,$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{2b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2\sqrt{3}}{2}, V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} b \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{6} b^3.$$

36. Пусть $SABC$ — правильная пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$ со стороной a . $\angle ASC = \angle CSB = \angle ASB = 90^\circ$. Боковые грани — равнобедренные треугольники.

$$SA = AC \cdot \sin \angle ACS = AC \cdot \sin 45^\circ,$$



$SA = a \frac{\sqrt{2}}{2}$. SO — высота пирамиды. Точка

O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности.

$AO = BO = CO = R$, где $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Из $\triangle SAO$, $\angle SOA = 90^\circ$ по теореме Пифагора:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}, SO = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}} = a \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}.$$

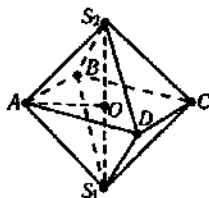
37. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. $SABC$ — тетраэдр с ребром a . SO — высота. Точка O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности. $AO = BO = CO = R$, где $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Из $\triangle SAO$, $\angle SOA = 90^\circ$, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$, $SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Объем тетраэдра $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

38. $SABCD S_1$ — октаэдр с ребром a . $V_{SABCD S_1} = V_{SABCD} + V_{S_1ABCD}$, где $SABCD$ и S_1ABCD — равновеликие правильные пирамиды с ребром a , то есть $V_{SABCD S_1} = 2V_{SABCD}$. SO — высота пирамиды $SABCD$. Точка O — центр описанной вокруг квадрата $ABCD$ окружности. $AO = BO = CO = DO = R$, где $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Из $\triangle SAO$, $\angle SOA = 90^\circ$, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$,

$$SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = a \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Объем пирамиды}$$

$SABCD$:

$V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{\text{осн}} = S_{ABCD} = a^2$.

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}. \text{ Объем октаэдра } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

39. $SABCD$ — пирамида, в основании которой лежит прямоугольник $ABCD$. $AB = 9$ м, $BC = 12$ м. SO — высота. AO , BO , CO и DO — проекции боковых ребер SA , SB , SC и SD на плоскость основания. Так

как $SA = SB = SC = SD = 12,5$ м, то $AO = BO = CO = DO$, точка O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$.

Из $\triangle ABD$ $\angle BAD = 90^\circ$ по теореме Пифагора $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$,
 $BD = \sqrt{81 + 144} = 15$ (м).

$BO = DO = 7,5$ м. Из $\triangle SBO$, $\angle SOB = 90^\circ$, по теореме Пифагора найдем SO : $SO = \sqrt{SB^2 - BO^2}$,

$$SO = \sqrt{156,25 - 56,25} = 10 \text{ (м)}.$$

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, где $H = SO$, $S_{\text{осн}} = AB \cdot BC$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 12 \cdot 10 = 360 \text{ (м}^3\text{)}.$$

40. Воспользуемся рисунком к задаче 36. $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$, $AB = AC = 6$ см, $BC = 8$ см. $SA = SB = SC = 9$ см. По формуле Герона найдем S_{ABC} :

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}; \text{ где } p = \frac{AB+AC+BC}{2},$$

$$p = \frac{6+6+8}{2} = 10 \text{ (см)}, S_{ABC} = \sqrt{10(10-6)(10-6)(10-8)} = \sqrt{10 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2} =$$

$= 8\sqrt{5}$ (см²). SO — высота пирамиды. OA , OB и OC — проекции боковых ребер SA , SB , SC на плоскость основания. Так как $SA = SB = SC$, то $OA = OB = OC = R$, точка O — центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности. Радиус окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$:

$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot S_{ABC}}, R = \frac{6 \cdot 6 \cdot 8}{4 \cdot 8\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \text{ (см)}. \text{ Из } \triangle SAO, \angle SOA = 90^\circ,$$

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}, SO = \sqrt{81 - \frac{81}{5}} = \sqrt{\frac{324}{5}} = \frac{18}{\sqrt{5}} \text{ (см)}. \text{ Объем пирамиды}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H, \text{ где } H = SO, S_{\text{осн}} = S_{ABC}, V = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{5} \cdot \frac{18}{\sqrt{5}} = 48 \text{ (см}^3\text{)}.$$

41. Воспользуемся рисунком к задаче 36. $SABC$ — треугольная пирамида. Пусть $BC = 4$ см, тогда $AC = AB = SA = SB = SC = 3$ см. Найдем площадь $\triangle ABC$ по формуле Герона: $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$, где

$$p = \frac{AB+AC+BC}{2}, p = \frac{3+3+4}{2} = 5 \text{ (см)}, S_{ABC} = \sqrt{5(5-3)(5-3)(5-4)} = 2\sqrt{5} \text{ (см}^2\text{)}.$$

SO — высота пирамиды. AO , BO и CO — проекции боковых ребер SA , SB и SC на плоскость ABC . Так как $SA = SB = SC$, то $AO = BO = CO = R$, где R — радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности, точка

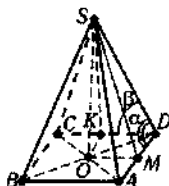
$$O \text{ — центр. } R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot S_{ABC}},$$

$$R = \frac{3 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} \text{ (см). Из } \triangle SAO, \angle SOA = 90^\circ, SO = \sqrt{SA^2 - AO^2},$$

$$SO = \sqrt{9 - \frac{81}{20}} = \sqrt{\frac{99}{20}} = \frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{5}} \text{ (см). Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H,$$

$$\text{где } H = SO, S_{\text{осн}} = S_{\text{ABC}}. V = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{5}} = \sqrt{11} \text{ (см}^3\text{)}.$$

42. Пусть $SABCD$ — пирамида, в основании которой лежит прямоугольник $ABCD$. $SA = SB = SC = SD = l$, пусть $\angle SDA = \alpha$, $\angle SDC = \beta$. Но $\triangle SAD$ и $\triangle SDC$ равнобедренные, $SA = SD$ и $SD = SC$, поэтому $\angle SAD = \angle SDA = \alpha$, $\angle SCD = \angle SDC = \beta$.



Рассмотрим $\triangle SAD$. Проведем медиану SM , SM — высота. Из $\triangle SOM$ $\angle SMO = 90^\circ$, $MD = SD \cdot \cos \alpha$, $MD = l \cos \alpha$, $AD = 2 \cdot MD = 2l \cos \alpha$. SK — медиана и высота $\triangle SDC$. Из $\triangle SCK$ $\angle SKC = 90^\circ$, $KC = SC \cos \beta$, $KC = l \cos \beta$, $DC = 2KC = 2l \cos \beta$. SO — высота пирамиды. OA , OB , OC и OD — проекции боковых ребер SA , SB , SC и SD на плоскость основания.

Так как $SA = SB = SC = SD$, то $OA = OB = OC = OD$, точка O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Из $\triangle ACD$ $\angle ADC = 90^\circ$, найдем AC :

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}, AC = \sqrt{4l^2 \cos^2 \alpha + 4l^2 \cos^2 \beta} = 2l \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}.$$

$$AO = OC = \frac{1}{2} AC = l \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}. \text{ Из } \triangle SAO, \angle SOA = 90^\circ,$$

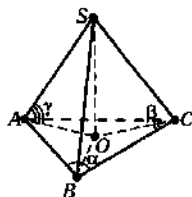
$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}, SO = \sqrt{l^2 - l^2 \cos^2 \alpha - l^2 \cos^2 \beta} = l \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$$

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, где $H = SO$,

$$S_{\text{осн}} = AD \cdot DC. V = \frac{1}{3} \cdot 2l \cos \alpha \cdot 2l \cos \beta \cdot l \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta} =$$

$$= \frac{4}{3} l^3 \cos \alpha \cos \beta \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$$

43. Пусть $SABC$ — пирамида, в основании которой лежит $\triangle ABC$. Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, тогда $\angle ACB = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. SO — высота пирамиды. OA , OB и OC — проекции боковых ребер пирамиды на плоскость основания.



$\angle SAO$, $\angle SBO$, $\angle SCO$ — углы между боковыми ребрами и плоскостью основания.

$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \gamma$. $\triangle SAO = \triangle SBO = \triangle SCO$ по общему катету SO и острому углу.

Таким образом, $AO = BO = CO = R$, где R — радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности. Из $\triangle SCO$ $\angle SOC = 90^\circ$, $SO = OC \cdot \operatorname{tg} \gamma$, $SO = R \operatorname{tg} \gamma$.

$$S_{\text{ABC}} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) =$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}, \text{ откуда}$$

$$AB = 2R \sin(\alpha + \beta), AC = 2R \sin \beta, BC = 2R \sin \alpha.$$

$$S_{ABC} = \frac{8R^3 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{4R} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta).$$

$$\text{Объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H, \text{ где } H = SO, S_{\text{осн}} = S_{ABC}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) R \operatorname{tg} \gamma = \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \gamma.$$

44. Задача решена в учебнике Погорелова.

45. $SABC$ — пирамида. $S_{ABC} = Q_1$. $A_1B_1C_1$ — сечение, параллельное основанию.

$S_{A_1B_1C_1} = Q_2$. SO — высота пирамиды $SABC$.

Пирамида $SA_1B_1C_1$ подобна пирамиде $SABC$.

SO_1 — ее высота. $OO_1 = h$.

Обозначим $SO_1 = x$, тогда $SO = x + h$.

$$\frac{x^2}{(x+h)^2} = \frac{Q_2}{Q_1}, \quad \frac{x}{x+h} = \frac{\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}},$$

$$x\sqrt{Q_1} = \sqrt{Q_2}x + \sqrt{Q_2}h,$$

$$x = \frac{\sqrt{Q_2}h}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}, \quad SO = \frac{\sqrt{Q_2}h}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} + h = \frac{\sqrt{Q_1}h}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}.$$

46. Пусть $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ — правильная усеченная четырехугольная пирамида. $AB = a$, $A_1B_1 = b$. OO_1 — высота. M и M_1 — середины ребер AD и A_1D_1 . MM_1 — апофема. M_1O_1OM — трапеция. OO_1 — высота. Опустим высоту M_1N , $M_1N = OO_1$.

M_1O_1ON — прямоугольник. $NO = M_1O_1$. O_1M_1 и OM — радиусы вписанных в квадраты $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ окружностей.

$$O_1M_1 = \frac{b}{2}, \quad OM = \frac{a}{2}. \quad MN — проекция наклонной$$

MM_1 на плоскость большего основания. $\angle M_1MN$ — двугранный угол при ребре AD , $\angle M_1MN = \alpha$.

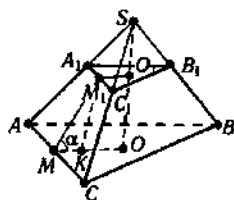
$$MN = OM - NO, \quad MN = \frac{1}{2}(a - b). \quad \text{Из } \triangle MM_1N:$$

$$\angle M_1NM = 90^\circ, \quad M_1N = MN \operatorname{tg} \alpha, \quad M_1N = \frac{1}{2}(a - b) \operatorname{tg} \alpha.$$

Объем срезанной пирамиды $V = \frac{1}{3} h (Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2)$ (задача 44), где $h = M_1N$, $Q_1 = S_{ABCD} = a^2$, $Q_2 = S_{A_1B_1C_1D_1} = b^2$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(a - b) \operatorname{tg} \alpha \cdot (a^2 + ab + b^2) = \frac{1}{6} (a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha.$$

47. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная треугольная пирамида. $AC = a$, $A_1C_1 = b$. OO_1 — высота. M и M_1 — середины ребер AC и A_1C_1 , MM_1 — апофема. MM_1O_1O — трапеция, OO_1 — ее высота. Опустим высоту M_1K , $M_1K = OO_1$, $M_1K \parallel OO_1$.



KM_1O_1O — прямоугольник, $KO = M_1O_1$. MK — проекция наклонной M_1M на плоскость большего основания, по теореме о трех перпендикулярах $MK \perp AC$, $O_1M_1 \parallel MK$, $A_1C_1 \parallel AC$, $O_1M_1 \perp A_1C_1$, $\angle M_1MK = \alpha$. O_1M_1 и OM — радиусы вписанных в $\triangle A_1B_1C_1$

и $\triangle ABC$ окружностей. $O_1M_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$, $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $MK = MO - KO$,
 $MK = \frac{\sqrt{3}}{6}(a - b)$.

Из $\triangle M_1MK$, $\angle M_1KM = 90^\circ$, $M_1K = MK \operatorname{tg} \alpha$, $M_1K = \frac{\sqrt{3}}{6}(a - b) \operatorname{tg} \alpha$.

Объем срезанной пирамиды $V = \frac{1}{3}h(Q_1 + \sqrt{Q_1Q_2} + Q_2)$ (задача 44),

где $h = M_1K$, $Q_1 = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $Q_2 = S_{A_1B_1C_1} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}(a - b) \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab}{4}\sqrt{3} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{24}(a - b)(a^2 + ab + b^2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{24}(a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha.$$

48. Задача решена в учебнике Погорелова.

49. Пусть расстояние от вершины пирамиды равно x . Объемы подобных тел соотносятся как кубы их соответствующих линейных размеров,

$$\text{откуда } \frac{x^3}{h^3} = \frac{1}{2}; \quad x^3 = \frac{h^3}{2}, \quad x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}.$$

§ 8. Объемы и поверхности тел вращения

1. Плотность меди $\rho = 8,94$ г/см³, масса проволоки $m = 100,7$ г, длина проволоки $l = 25$ м = 2500 см, $\rho = \frac{m}{V}$, где V — объем проволоки. $V = \frac{m}{\rho}$,

$$V = \frac{100,7}{8,94} \approx 11,26 (\text{см}^3). \text{ Объем проволоки } V = \pi r^2 l, \text{ где } r \text{ — радиус}$$

$$\text{проволоки, } r^2 = \frac{V}{\pi l}, \text{ диаметр проволоки } d = 2\sqrt{\frac{V}{\pi l}}, \quad d = 2\sqrt{\frac{11,26}{\pi \cdot 2500}} \approx$$

$$\approx 0,075 \text{ см} = 0,75 \text{ мм}.$$

2. За один ход поршень проталкивает объем воды $V_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h$, где $d = 80 \text{ мм} = 0,8 \text{ дм}$, $h = 150 \text{ мм} = 1,5 \text{ дм}$. $V_1 = \frac{\pi \cdot (0,8)^2}{4} \cdot 1,5 = 0,75 \text{ л}$. За

одну минуту продуктивность поршня составляет $V_2 = 50 \cdot V_1 = 50 \cdot 0,75 = 37,5 \text{ л}$, а за час $V = 60 \cdot V_2 = 60 \cdot 37,5 = 2250 \text{ л}$. Продуктивность насоса $V_n = 2 \cdot V = 4500 \text{ л}$.

3. Объем цилиндра $V_1 = \pi r^2 h$, где r — радиус основания, h — высота, если объем увеличится в n раз, то $V = nV_1 = n\pi r^2 h = \pi r^2 H$, где $H = nh$, следовательно, высоту нужно увеличить в n раз, или $V = nV_1 = n\pi r^2 h = \pi R^2 H$, $R^2 = nr^2$, $R = \sqrt{n}r$, таким образом, радиус нужно увеличить в $\sqrt{n}$ раз.

4. Пусть сторона основания правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, равна a , тогда радиус основания цилиндра — радиус описанной вокруг основания призмы окружности $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Пусть высота цилиндра H , тогда объем $V_1 = S_{\text{осн}} \cdot H = \pi R^2 H$, $V_1 = \frac{a^2}{3} \pi H$. Радиус основания цилиндра, вписанного в призму, — это

радиус вписанной в основание призмы окружности $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Высота

этого цилиндра тоже H , а объем $V_2 = \pi r^2 H$, $V_2 = \frac{a^2}{12} \pi H$. Отношение

$$\text{объемов } \frac{V_1}{V_2} = \frac{a^2}{3} \pi H \cdot \frac{12}{a^2 \pi H} = 4.$$

5. Радиус основания цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, является радиусом окружности, вписанной в правильный шестиугольник, то есть $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, где a — сторона шестиугольника.

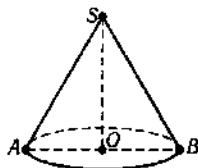
Объем цилиндра $V = \pi r^2 H$, где H — высота цилиндра и длина бокового ребра призмы, $H = a$. $V = \pi \cdot \frac{a^2 3}{4} a = \frac{3}{4} \pi a^3$.

6. Объем трубы $V = \pi H(R^2 - r^2)$, где r — внутренний радиус трубы, $r = \frac{1}{2}d$, $d = 13 \text{ мм}$, $r = 6,5 \text{ мм} = 0,65 \text{ см}$, R — внешний радиус трубы, $R = r + 4 = 6,5 + 4 = 10,5 \text{ (мм)} = 1,05 \text{ (см)}$, H — длина трубы, $H = 25 \text{ м} = 2500 \text{ см}$.

$$V \approx \pi \cdot 2500(1,025 - 0,4225) = 5340 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Масса трубы $m \approx \rho V$, где $\rho = 11,4 \text{ г/см}^3$, $m = 11,4 \cdot 5340 = 60884 \text{ (г)} \approx 61 \text{ (кг)}$.

7. Радиус основания конуса $OB = 2$ м, образующая $SB = 2,5$ м. SO — высота конуса. Из $\triangle SBO$, $\angle SOB = 90^\circ$, $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$,



$$SO = \sqrt{6,25 - 4} \approx 1,5 \text{ (м)}.$$

$$\text{Объем конуса } V = \frac{1}{3} \pi R^2 H, \text{ где } R = OB, H = SO.$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 4 \cdot 1,5 \approx 6,3 \text{ (м}^3\text{)}.$$

8. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. SAB — осевое сечение конуса.

$$\triangle SAB \text{ — равнобедренный, } SA = SB, \angle ASB = 90^\circ, S_{SAB} = 9 \text{ м}^2, S_{SAB} = \frac{1}{2} SA \cdot SB = \frac{1}{2} SA^2, SA = \sqrt{2S_{SAB}}, SA = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2} \text{ (м)}. SO \text{ — медиана и высота } \triangle SAB, \text{ высота конуса. } \angle SAO = 45^\circ, SO = AO = SA \cdot \cos 45^\circ, SO = AO = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \text{ (м)}. \text{ Объем конуса } V = \frac{1}{3} \pi R^2 H, \text{ где}$$

$$R = AO, H = SO, V = \frac{1}{3} \pi \cdot 9 \cdot 3 = 9\pi \text{ (м}^3\text{)}.$$

9. Воспользуемся рисунком к задаче 7. Образующая $SB = l$, длина окружности основания равна c . $c = 2\pi R$, где R — радиус основания.

$$R = \frac{c}{2\pi}. SO \text{ — высота конуса. Из } \triangle SBO: \angle SOB = 90^\circ,$$

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}, OB = R, SO = \sqrt{l^2 - \frac{c^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}.$$

$$\text{Объем конуса } V = \frac{1}{3} \pi R^2 H, \text{ где } H = SO.$$

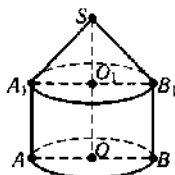
$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{c^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2} = \frac{c^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}.$$

10. Воспользуемся рисунком к задаче 7. Образующая конуса $SB = l$, SO — высота конуса. OB — проекция образующей SB на плоскость основания, радиус основания, $\angle SBO = \alpha$. Из $\triangle SBO$, $\angle SOB = 90^\circ$, $SO = SB \sin \alpha$, $SO = l \sin \alpha$; $OB = SB \cos \alpha$, $OB = l \cos \alpha$. Объем конуса $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$,

$$\text{где } R = OB, H = SO. V = \frac{1}{3} \pi \cdot l^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha = \frac{\pi l^3}{3} \sin \alpha \cos^2 \alpha.$$

11. Радиус основания цилиндра $R = 2,5$ м, его высота $OO_1 = 2,2$ м, высота стога $SO = 4$ м, высота конической части $SO_1 = SO - OO_1$, $SO_1 = 4 - 2,2 = 1,8$ (м).

$$\text{Объем цилиндра } V_{\text{ц}} = \pi R^2 H_{\text{ц}}, \text{ где } H_{\text{ц}} = OO_1, V_{\text{ц}} = \pi \cdot 6,25 \cdot 2,2 \approx 43 \text{ (м}^3\text{)}.$$



Объем конуса $V_k = \frac{1}{3} \pi R^2 H_k$, где $H_k = SO_1$.

$$V_k = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6,25 \cdot 1,8 \approx 11,8 \text{ (м}^3\text{)}.$$

Объем стога $V = V_{\text{ц}} + V_k$, $V = 43 + 11,8 = 54,8 \text{ м}^3$.

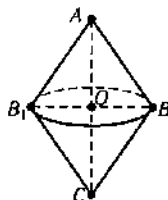
Масса конуса $m = \rho V$, где $\rho = 0,03 \text{ г/см}^3 = 30 \text{ кг/м}^3$.

$$m = 30 \cdot 54,8 = 1644 \text{ (кг)} \approx 1,6 \text{ (т)}.$$

12. Объем жидкости в конце $V_k = \frac{1}{3} \pi R^2 H$, где $H = 0,18 \text{ м}$, $R = \frac{1}{2} d$, $d = 0,24 \text{ м}$, $R = 0,12 \text{ м}$, $V_k = \frac{1}{3} \pi \cdot 0,0144 \cdot 0,18 = 0,0027 \text{ (м}^3\text{)}$. $V_k = V_{\text{ц}}$.

Объем цилиндра $V_{\text{ц}} = \pi r^2 h$, где $r = \frac{1}{2} d_{\text{ц}}$, $d_{\text{ц}} = 0,1 \text{ м}$, $r = 0,05 \text{ м}$. $h = \frac{V_k}{\pi r^2}$, $h = \frac{0,0027}{\pi \cdot 0,0025} \approx 0,34 \text{ м}$.

13. В результате вращения правильного треугольника ABC со стороной a вокруг стороны AC получим фигуру, которую можно разбить на два конуса с общим основанием радиусом OB , O — середина AC . AO — высота конуса, $AO = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$. Из



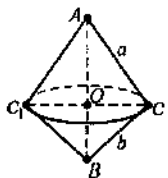
$\triangle OAB$, $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle OAB = 60^\circ$, $OB = AB \sin 60^\circ$,

$OB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Объем конуса $V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 H$, где $R = OB$,

$$H = AO, V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi a^3}{8}.$$

Объем тела вращения $V = 2V_1$, $V = \frac{\pi a^3}{4}$.

14. Прямоугольный $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$) вращается вокруг своей гипотенузы. $AC = a$, $BC = b$. Получим фигуру, которая состоит из двух конусов с общим основанием.



Объем фигуры $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$, где $R = OC$, $H = AB$, OC — высота $\triangle ABC$.

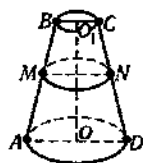
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$, $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot OC, OC = \frac{AC \cdot BC}{AB}, OC = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

15*. Задача решена в учебнике Погорелова.

16. Сосновая колода имеет форму усеченного конуса с диаметрами оснований $AD = 42$ см, $BC = 25$ см и высотой $OO_1 = 15,5$ см.



Объем усеченного конуса $V_1 = \frac{1}{3} \pi H (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$

(см. предыдущую задачу), где $H = OO_1$, $R_1 = \frac{1}{2} AD$,

$R_1 = 21$ см, $R_2 = \frac{1}{2} BC$, $R_2 = 12,5$ см.

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot 15,5 \cdot (441 + 262,5 + 156,25) \approx 4442\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

$ABCD$ — осевое сечение конуса, $ABCD$ — трапеция, MN — средняя

линия. $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$, $MN = \frac{1}{2}(42 + 25) = 33,5$ (см).

Через прямую MN проведем плоскость, параллельную основанию, получим сечение с диаметром MN . Его площадь $S = \frac{\pi d^2}{4}$, $d = MN$,

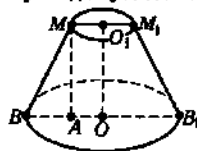
$$S = \frac{\pi \cdot 1122,25}{4} \approx 280,56\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Объем колоды $V_2 = S \cdot H$, $V_2 = 280,56\pi \cdot 15,5 = 4348,68$ (см³).

$$\text{Погрешность при вычислении } \Delta V = \frac{V_1 - V_2}{V_1} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{4442\pi - 4348,68\pi}{4442\pi} \cdot 100\% \approx 2\%.$$

17. Пусть дан усеченный конус, OO_1 — его высота. Радиусы его оснований $OB = R$, $O_1M = r$. MB — образующая. Из точки M проведем прямую $MA \parallel OO_1$,



MA — перпендикуляр к плоскости основания.

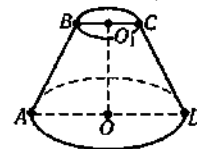
$OA = O_1M = r$, $AB = R - r$. AB — проекция образующей MB на плоскость большего основания. $\angle MBA = 45^\circ$, $MA = AB = R - r$.

Объем срезанного конуса $V = \frac{1}{3} \pi H (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$, где $H = MA$,

$$R_1 = R, R_2 = r.$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (R - r)(R^2 + rR + r^2) = \frac{\pi}{3} (R^3 - r^3). \text{ Если } R < r \text{ } V = \frac{\pi}{3} |R^3 - r^3|$$

18.



Радиусы оснований усеченного конуса $OD = R$, $O_1C = r$, OO_1 — высота конуса.

Осевым сечением срезанного конуса является трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 2R$, $BC = 2r$. Площади оснований конуса $S_1 = \pi R^2$, $S_2 = \pi r^2$.

Площадь трапеции $ABCD$ $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)$

$$H = \pi(R^2 - r^2), \text{ где } H = OO_1, H = \frac{2\pi(R^2 - r^2)}{(AD + BC)} = \frac{\pi(R - r)(R + r)}{R + r} = \pi(R - r).$$

$$\text{Объем усеченного конуса: } V = \frac{1}{3} \pi H (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2), R_1 = R, R_2 = r.$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \pi(R - r)(R^2 + rR + r^2) = \frac{\pi^2}{3} (R^3 - r^3).$$

$$\text{Для любых } R \text{ и } r \quad V = \frac{\pi^2}{3} |R^3 - r^3|$$

19. Радиусы оснований усеченного конуса $R_1 = 4$ см, $R_2 = 22$ см. Объем усеченного конуса $V = \frac{1}{3} \pi H (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$, где H — высота конуса.

$$V = \frac{1}{3} \pi H (16 + 4 \cdot 22 + 484) = 196 \pi H \text{ (см}^3\text{)}. \text{ Объем равновеликого ци-}$$

$$\text{линдра } V = \pi R^2 H, \text{ где } R \text{ — радиус основания цилиндра. } R = \sqrt{\frac{V}{\pi H}}.$$

$$R = \sqrt{\frac{196 \pi H}{\pi H}} = 14 \text{ (см)}.$$

20. Радиусы оснований усеченного конуса $OM = R, O_1 M_1 = r, SO$ — высота полного конуса, OO_1 — высота срезанного конуса. Пусть $OO_1 = h, SO = H$, тогда $SO_1 = H - h$. Объем срезанного конуса:

$$V_{\text{ср}} = \frac{1}{3} \pi h (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2), \text{ где } R_1 = R, R_2 = r.$$

$$V_{\text{ср}} = \frac{1}{3} \pi \cdot h (R^2 + rR + r^2). \triangle SO_1 M_1 \sim \triangle SOM,$$

так как $\angle SO_1 M_1 = \angle SOM = 90^\circ, \angle OSM$ — общий.

$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1 M_1}{OM}, \frac{H - h}{H} = \frac{r}{R}, RH - hR = rH, h = \frac{H(R - r)}{R}.$$

$$\text{Объем полного конуса } V_{\text{п}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H. \text{ Отношение объемов полного}$$

и срезанного конусов:

$$\frac{V_{\text{ср}}}{V_{\text{п}}} = \frac{\frac{1}{3} \pi \frac{H(R - r)}{R} (R^2 + rR + r^2)}{\frac{1}{3} \pi R^2 H} = \frac{R^3 - r^3}{R^3} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3, \text{ если } R > r$$

21. Масса шара $m = \rho V, V = \frac{m}{\rho}$, где $m = 10$ кг = 10 000 г, $\rho = 7,2$ г/см³.

$$V = \frac{10000}{7,2} \approx 1389 \text{ (см}^3\text{)}. \text{ Объем шара } V = \frac{4}{3} \pi R^3, R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}},$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1389}{4\pi}} \approx 7 \text{ (см)}. \text{ Диаметр шара } d = 2R, d = 14 \text{ см}.$$

22. Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $R = \frac{d}{2}$, $V = \frac{4}{3}\pi \frac{d^3}{8} = \frac{\pi d^3}{6}$, где d — диаметр шара.

$$V_1 = \frac{\pi d_1^3}{6}, d_1 = 25 \text{ см}, V_1 = \frac{\pi \cdot 15625}{6} \approx 2604\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$V_2 = \frac{\pi d_2^3}{6}, d_2 = 35 \text{ см}, V_2 = \frac{\pi \cdot 42875}{6} \approx 7146\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$V = V_1 + V_2 = (2604 + 7146)\pi = 9750\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$V = \frac{\pi d^3}{6}, d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}, d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 9750\pi}{\pi}} \approx 39 \text{ (см)}.$$

23. Объем свинца $V = \frac{m}{\rho}$, где $m = 1 \text{ кг} = 1000 \text{ г}$, $\rho = 11,4 \text{ г/см}^3$. $V = \frac{1000}{11,4} \approx 88 \text{ (см}^3\text{)}.$

$$\text{Объем шарика } V_{\text{ш}} = \frac{\pi d^3}{6}, \text{ где } d = 1 \text{ см}, V_{\text{ш}} = \frac{\pi}{6} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Из 1 кг свинца можно выплавить шариков $N = \frac{V}{V_{\text{ш}}}$, $N = \frac{88 \cdot 6}{\pi} \approx 167$.

24. Объем цилиндра, высота которого равна диаметру основания и равна d ,

$$V_{\text{ц}} = \frac{\pi d^2}{4} d = \frac{\pi d^3}{4}. \text{ Диаметр самого большого шара, который можно}$$

выточить из этого цилиндра, тоже d . Его объем $V_{\text{ш}} = \frac{\pi d^3}{6}$. Процент

сточенного материала определяется по формуле $\Delta V = \frac{V_{\text{ц}} - V_{\text{ш}}}{V_{\text{ц}}} \cdot 100\%$,

$$\Delta V = \frac{\frac{\pi d^3}{4} - \frac{\pi d^3}{6}}{\frac{\pi d^3}{4}} \cdot 100\% \approx 33\frac{1}{3}\%.$$

25. Объем материала, из которого изготовлен шар $V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$, где

R — внешний радиус, $R = \frac{1}{2}D$, $D = 18 \text{ см}$, $R = 9 \text{ см}$, r — внутренний радиус,

$$r = R - 3 = 9 - 3 = 6 \text{ (см)}. V = \frac{4}{3}\pi(729 - 216) \approx 2149 \text{ (см}^3\text{)}.$$

26. Объем полушара $V_{\text{ш}} = \frac{2}{3}\pi R^3$, объем цилиндра $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H$.

$$V = V_{\text{ш}} + V_{\text{ц}}, V = \frac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 H, H = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R.$$

27. Диаметр шара $d = 3 + 9 = 12$ (см), радиус шара $R = \frac{1}{2}d$, $R = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см).

Объем сегмента шара $V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right)$. $H_1 = 3$ см, $H_2 = 9$ см.

$$V_1 = \pi \cdot 9 \left(6 - \frac{3}{3} \right) = 45\pi \text{ (см}^3\text{)}. V_2 = \pi \cdot 81 \left(6 - \frac{9}{3} \right) = 243\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

28. Если диаметр шара d , то его радиус $R = \frac{1}{2}d$, $d = 2R$.

Высота сегмента $H = 0,1d = 0,2R$. Объем шара $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, объем сег-

$$\text{мента } V_{\text{с}} = \pi \cdot 0,04R^2 \left(R - \frac{0,2R}{3} \right) \approx 0,037\pi R^3. \frac{V_{\text{с}}}{V_{\text{ш}}} = 0,037\pi R^3 \cdot \frac{3}{4\pi R^3} = 0,028.$$

29. Пусть радиус шаров равен R . Объем одного такого шара $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3$. Общая

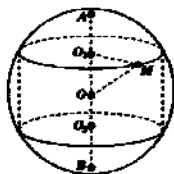
часть двух шаров состоит из двух сегментов, высота которых $H = \frac{R}{2}$. Объем

такого сегмента $V_{\text{с}} = \pi \frac{R^2}{4} \left(R - \frac{R}{6} \right) = \frac{5\pi R^3}{24}$. Объем общей части шара

$$V = 2V_{\text{с}}, V = \frac{5\pi R^3}{12}. \frac{V}{V_{\text{ш}}} = \frac{5\pi R^3}{12} \cdot \frac{3}{4\pi R^3} = \frac{5}{16}.$$

30. Диаметр шара $AB = 30$ см. AB — ось цилиндра с радиусом 12 см.

Часть шара, расположенного внутри этого цилиндра, состоит из цилиндра с высотой O_1O_2 и двух равновеликих сегментов с высотами O_1A и O_2B , $O_1A = O_2B$. Точка O — центр шара, середина высоты O_1O_2 цилиндра. $OA = OB = \frac{1}{2}AB = 15$ см. $O_1M = 12$ см.



Из $\triangle OMO_1$, $\angle OO_1M = 90^\circ$, $OM = 15$ см, $OO_1 = \sqrt{OM^2 - O_1M^2}$, $OO_1 = \sqrt{225 - 144} = 9$ (см), $O_1O_2 = 2 \cdot OO_1 = 18$ см.

$AO_1 = OA - OO_1$, $AO_1 = 15 - 9 = 6$ (см).

Объем цилиндра $V_{\text{ц}} = \pi r^2 H$, где $r = O_1M$, $H = O_1O_2$.

$V_{\text{ц}} = \pi \cdot 144 \cdot 18 = 2592\pi$ (см³). Объем сегмента

$$V_{\text{с}} = \pi \cdot h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right), \text{ где } R = OA, h = O_1A. V_{\text{с}} = \pi \cdot 36 \left(15 - \frac{6}{3} \right) =$$

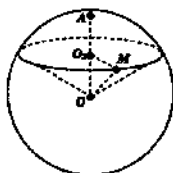
$= 468\pi$ (см³). Объем части шара, расположенного внутри цилиндра $V = V_{\text{ц}} + 2V_{\text{с}}$, $V = (2592 + 2 \cdot 468)\pi = 3528\pi$ (см³).

31. Радиус шара $OA = 75$ см, радиус основания сектора шара $O_1M = 60$ см.

Из $\triangle OMO_1$, $\angle OO_1M = 90^\circ$, $OM = OA = 75$ см, $OO_1 = \sqrt{OM^2 - O_1M^2}$,

$OO_1 = \sqrt{5625 - 3600} = 45$ (см). $AO_1 = AO - OO_1$, $AO_1 = 75 - 45 = 30$ (см).

Объем сектора шара: $V_1 = \frac{2}{3} \pi R^2 H$, где $R = OA$, $H = AO_1$.



$$V_1 = \frac{2}{3} \pi \cdot 5625 \cdot 30 = 112500\pi \text{ (см}^3\text{)} = 112,5\pi \text{ дм}^3.$$

Или $V_2 = V - V_1$, где V — объем шара

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 421875 = 562500\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$V_2 = (562500 - 112500)\pi = 450000\pi \text{ (см}^3\text{)} = 450\pi \text{ (дм}^3\text{)}.$$

32. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. $\angle O_1OM = 30^\circ$, $OM = R$,

$$OO_1 = OM \cos 30^\circ, \quad OO_1 = R \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad AO_1 = AO - OO_1, \quad AO_1 = R - \frac{\sqrt{3}}{2} R =$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{3})}{2} R. \text{ Объем сектора шара } V = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot H, \text{ где } H = AO_1. V =$$

$$= \frac{2}{3} \pi R^2 \frac{(2 - \sqrt{3})}{2} R = \frac{1}{3} \pi R^3 (2 - \sqrt{3}).$$

33. Поверхности двух шаров $S_1 = 4\pi R_1^2$, $S_2 = 4\pi R_2^2$, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$, $\frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \frac{m}{n}$,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}. \text{ Объемы шаров } V_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3, \quad V_2 = \frac{4}{3} \pi R_2^3. \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3} \pi R_1^3}{\frac{4}{3} \pi R_2^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{m}^3}{\sqrt{n}^3}.$$

34. Пусть a и b — катеты треугольника, c — его гипотенуза. Поверхность

шара с диаметром d $S = 4\pi \cdot \frac{d^2}{4} = \pi d^2$. Поверхности шаров, диаметры

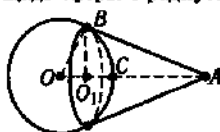
которых являются сторонами треугольника: $S_a = \pi a^2$, $S_b = \pi b^2$, $S_c = \pi c^2$. Так как $a^2 + b^2 = c^2$, то $S_c = S_a + S_b$.

35. В результате вращения квадрата вокруг стороны получим цилиндр, у которого $R = H = a$, где a — сторона квадрата. Полная поверхность цилиндра $S_{\text{ц}} = 2S_{\text{ос}} + S_{\text{б}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH$. $S_{\text{ц}} = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$. Площадь сферы с радиусом a $S_{\text{с}} = 4\pi a^2$. $S_{\text{ц}} = S_{\text{с}}$.

36. Радиус шара $OC = 15$ см, $OA = 25$ см. AB — касательная к шару, $OB \perp AB$.

$\triangle OBO_1 \sim \triangle OBA$, так как $\angle OBA = \angle OO_1B = 90^\circ$,

$\angle BOA$ — общий. $\frac{OB}{OA} = \frac{OO_1}{OB}$, $OO_1 = \frac{OB^2}{OA}$.



$$OO_1 = \frac{225}{25} = 9 \text{ (см)}, O_1C = OC - OO_1, O_1C = 15 - 9 = 6 \text{ (см)}.$$

Площадь сферического сегмента $S = 2\pi RH$, где $H = O_1C$. $S = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 = 180\pi \text{ (см}^2\text{)}$.

37. Воспользуемся рисунком к задаче 30. Радиус шара $OM = 10 \text{ см}$,

диаметр отверстия $d = 12 \text{ см}$, радиус $O_1M = \frac{1}{2}d = 6 \text{ см}$. Из $\triangle OMO_1$,

$\angle OO_1M = 90^\circ$, $OO_1 = \sqrt{OM^2 - O_1M^2}$, $OO_1 = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ (см)}$. Площадь боковой поверхности цилиндра $S_n = 2\pi rH$, где $r = O_1M$, $H = O_1O_2 = 2OO_1$.

$S_n = 2\pi \cdot 6 \cdot 16 = 192\pi \text{ (см}^2\text{)}$. $O_1A = OA - OO_1$, $O_1A = 10 - 8 = 2 \text{ (см)}$.

Площадь сферического сегмента $S_c = 2\pi RH$, где $R = OM$, $h = O_1A$.

$S_c = 2\pi \cdot 10 \cdot 2 = 40\pi \text{ (см}^2\text{)}$. Площадь сферы $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$, где $R = OM$, $S_{\text{сф}} = 4\pi \cdot 100 = 400\pi \text{ (см}^2\text{)}$. Площадь сферы с просверленным в ней отверстием $S = S_{\text{сф}} - 2S_c + S_n$.

$S = 400\pi - 80\pi + 192\pi = 512\pi \text{ (см}^2\text{)}$.

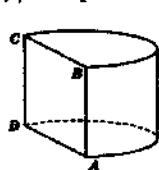
38. Площадь боковой поверхности трубы $S = \pi dH$, где $d = 65 \text{ см}$, $H = 18 \text{ м} = 1800 \text{ см}$.

$S = \pi \cdot 65 \cdot 1800 = 117000\pi \text{ (см}^2\text{)} = 11,7\pi \text{ (м}^2\text{)}$. Но это составляет

90 % от всей жести, необходимой для изготовления трубы, $S_{\pi} = \frac{S}{0,9}$,

$$S_{\pi} = \frac{11,7\pi}{0,9} \approx 40,8 \text{ (м}^2\text{)}.$$

39. Диаметр основания $AD = 5,8 \text{ м}$, высота $AB = 6 \text{ м}$. Площадь основания



$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{8}.$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{\pi \cdot 33,64}{8} \approx 4,205\pi \text{ (м}^2\text{)}. S_{ABCD} = AD \cdot AB,$$

$$S_{ABCD} = 5,8 \cdot 6 = 34,8 \text{ (м}^2\text{)}. \text{ Боковая поверхность полуцилиндра}$$

$$S_b = \frac{1}{2} \pi dH, S_b = \frac{1}{2} \pi \cdot 5,8 \cdot 6 = 54,7 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Полная поверхность $S = S_b + S_{ABCD} + 2S_{\text{осн}}$.

$$S = 54,7 + 34,8 + 26,4 \approx 116 \text{ (м}^2\text{)}.$$

40. Площадь стакана $S = \pi \frac{d^2}{4} + \pi dH$, где $d = 25 \text{ см}$, $H = 50 \text{ см}$.

$$S = \pi \cdot \frac{625}{4} + \pi \cdot 25 \cdot 50 = 4418 \text{ (см}^2\text{)}. \text{ Площадь листа } S = \frac{\pi D^2}{4}, D = \sqrt{\frac{4S}{\pi}},$$

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot 4418}{\pi}} = 75 \text{ (см)}.$$

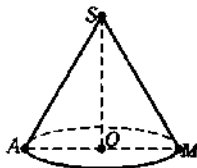
41. Площадь основания цилиндра $S_{\text{осн}} = \pi R^2 = Q$, $R = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$. Площадь осевого

сечения $S_{\text{ос}} = M = 2RH$, где H — высота цилиндра. $H = \frac{M}{2R} = \frac{M}{2} \sqrt{\frac{\pi}{Q}}$.

Боковая поверхность цилиндра $S_b = 2\pi RH$, $S_b = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \cdot \frac{M}{2} \sqrt{\frac{\pi}{Q}} = \pi M$.

Полная поверхность цилиндра $S = 2S_{\text{ос}} + S_b$, $S = 2Q + \pi M$.

42.



Высота конуса $SO = 3,5$ м. Радиус основания

$OM = \frac{1}{2}d$, $d = 4$ м, $OM = 2$ м. Образующую SM

найдем из $\triangle SMO$, $\angle SOM = 90^\circ$.

$$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}, SM = \sqrt{12,25 + 4} = 0,5\sqrt{65} \text{ м.}$$

Боковая поверхность конуса $S_b = \pi Rl$, где $l = SM$,

$$S_b = \pi \cdot 2 \cdot 0,5\sqrt{65} \approx 25 \text{ (м}^2\text{)}.$$

43. Воспользуемся рисунком к предыдущей задаче. Высота конуса $SO = 2$ м, радиус основания $OM = \frac{1}{2}d$, $d = 6$ м, $OM = 3$ м.

$$\text{Из } \triangle SMO \angle SOM = 90^\circ, SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}, SM = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Поверхность крыши $S = \pi \cdot OM \cdot SM$. $S = \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{13} \approx 33,98 \text{ (м}^2\text{)}.$

44. Воспользуемся рисунком к задаче 42. Площадь основания конуса

$S = \pi R^2$, где R — радиус основания, $R = OM = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. OM — проекция

образующей SM на плоскость основания. $\angle SMO = \alpha$. Из $\triangle SMO$

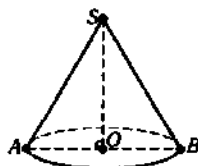
$$\angle SOM = 90^\circ, SM = \frac{OM}{\cos \alpha}, SM = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

$$\text{Боковая поверхность конуса } S_b = \pi \cdot OM \cdot SM. S_b = \pi \cdot \sqrt{\frac{S}{\pi}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \frac{S}{\cos \alpha}.$$

45. Осевым сечением конуса является правильный $\triangle SAB$. Пусть $SA = SB =$

$$= AB = a. \text{ Боковая поверхность конуса } S_b = \frac{1}{2} \pi d l,$$

$$\text{где } d = AB, l = SB. S_b = \frac{\pi a^2}{2}.$$



Полная поверхность конуса $S = S_b + S_{\text{ос}}$, где

$$S_{\text{ос}} = \frac{\pi d^2}{4}, S_{\text{ос}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

$$S = \frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{4} = \frac{3}{4} \pi a^2. \quad \frac{S_b}{S} = \frac{\frac{\pi a^2}{2}}{\frac{3}{4} \pi a^2} = \frac{2}{3}.$$

46. Полная поверхность равностороннего конуса $S_{\text{пол}} = \frac{3}{4} \pi a^2$ (см. предыдущую задачу), где a — сторона осевого сечения. Высота конуса

является диаметром шара, но она также является высотой осевого сечения конуса. Диаметр шара $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, радиус шара $R = \frac{d}{2}$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Поверхность шара $S_k = 4\pi R^2$.

$$S_k = \frac{3}{4}\pi a^2. S_k = S_{\text{кон}}.$$

47. Воспользуемся рисунком к задаче 45. $AS = SB = R$, где R — радиус полуокружности. Длина дуги полуокружности $L = \pi R$, а длина окружности основания конуса $l = 2\pi r$, где r — радиус основания. $L = l$, откуда $r = \frac{R}{2}$. Диаметр основания $AB = 2r = R$. $\triangle SAB$ — правильный, $\angle ASB = 60^\circ$. SO — медиана, высота и биссектриса $\angle ASB$, $\angle OSB = \frac{1}{2}\angle ASB$, $\angle OSB = 30^\circ$.

48. Радиус кругового сектора $R = 3$ м, его угол 120° . Длина дуги сектора $L = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot 120^\circ = \frac{2}{3}\pi R$. Длина окружности основания конуса $l = 2\pi r$, где r — радиус основания. Так как $L = l$, то $\frac{2}{3}\pi R = 2\pi r$, $r = \frac{1}{3}R$. $r = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ (м).

49. Воспользуемся рисунком к задаче 20. Плоскость, проходящая через точку O_1 на высоте SO конуса параллельна его основанию, делит конус на срезанный конус с высотой OO_1 и подобный к первоначальному конус с высотой SO_1 . SM — образующая полного конуса, SM_1 — образующая меньшего конуса, MM_1 — образующая срезанного конуса. $MM_1 = 1,42$ м. Пусть $SM_1 = x$ м, тогда $SM = (x + 1,42)$ м. Диаметры оснований срезанного конуса 0,43 м и 0,036 м, радиусы оснований соответственно $OM = 0,215$ м,

$O_1M_1 = 0,018$ м. $\triangle SO_1M_1 \sim \triangle SOM$, так как $\angle SOM = \angle SO_1M_1 = 90^\circ$, $\angle OSM$ — общий.

$$\frac{O_1M_1}{OM} = \frac{SM_1}{SM}; \frac{0,018}{0,215} = \frac{x}{x + 1,42}, x \approx 0,13.$$

$$SM_1 = 0,13 \text{ м}, SM = 0,13 + 1,42 = 1,55 \text{ (м)}.$$

Боковая поверхность конуса $S = \pi RL$, где R — радиус основания, l — образующая. Боковая поверхность большего конуса $S_1 = \pi \cdot OM \times SM$,

$S_1 = \pi \cdot 0,215 \cdot 1,55 \approx 1,05$ (м²). Боковая поверхность меньшего конуса

$$S_2 = \pi \cdot O_1M_1 \cdot SM_1, S_2 = \pi \cdot 0,018 \cdot 0,13 \approx 0,007 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Боковая поверхность срезанного конуса $S = S_1 - S_2$, $S = 1,05 - 0,007 \approx 1,04$ (м²).

50. Воспользуемся рисунком к задаче 20. Диаметры оснований срезанного конуса 25 см и 30 см, соответственно радиусы оснований $O_1M_1 = 12,5$ см =

$= 0,125$ м, $OM = 15$ см $= 0,15$ м. Образующая срезанного конуса $M_1M = 27,5$ см $= 0,275$ м. SO — высота полного конуса, SM — его образующая. Конус с высотой SO_1 подобный полному, SM_1 — его образующая,

O_1M_1 — радиус его основания. $\frac{O_1M_1}{OM} = \frac{SM_1}{SM}$.

Если $SM_1 = x$ м, то $SM = (x + 0,275)$.

Имеем: $\frac{0,125}{0,15} = \frac{x}{x + 0,275}$, $x = 1,375$.

$SM_1 = 1,375$ м, $SM = 1,375 + 0,275 = 1,65$ (м). Боковая поверхность полного конуса $S_1 = \pi \cdot OM \cdot SM$, $S_1 = \pi \cdot 0,15 \cdot 1,65 \approx 0,78$ (м²).

Боковая поверхность меньшего конуса $S_2 = \pi \cdot 0,15 \cdot 1,65 \approx 0,78$ (м²). Боковая поверхность меньшего конуса $S_2 = \pi \cdot O_1M_1 \cdot S_1M$, $S_2 = \pi \cdot 0,125 \cdot 1,375 = 0,54$ (м²). Боковая поверхность срезанного конуса $S_6 = S_1 - S_2$, $S_6 = 0,78 - 0,54 = 0,24$ (м²). Площадь меньшего основания срезанного конуса $S_{\text{ок}} = \pi \cdot O_1M_1^2$, $S_{\text{ок}} = \pi \cdot 0,0156 \approx 0,049$ (м²). Площадь ведра, которую нужно покрасить, $S_7 = S_6 + S_{\text{ок}}$, $S_7 = 0,24 + 0,049 = 0,289$ (м²). Площадь ста ведер $S = 100 \cdot S_7$, $S = 100 \cdot 0,289 = 28,9$ (м²). Для этого нужно олифы $28,9 \cdot 150 = 4335$ (г) $\approx 4,3$ (кг).